

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio



Palchetto

Num.º d'ordine

158

19295

21 16 31

NAZIONALE

B. Prov.

272

NAPOLI

VITT. EM. III

1933

P. Rev. II 272



ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE.



a. 38 -

Les Éditeurs ayant rempli toutes les formalités exigibles pour la garantie de leur propriété dans les différents pays avec lesquels la France a conclu des traités concernant la propriété littéraire, ainsi que dans ceux où la réciprocité existe, toute contrefaçon de cet ouvrage sera rigoureusement poursuivie.

L'Auteur et les Éditeurs déclarent également se réserver leurs droits à l'égard des traductions qui pourraient être faites dans ces pays.



609312

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

PAR

A. M. LEGENDRE,

AVEC ADDITIONS ET MODIFICATIONS,

PAR M. A. BLANCHET,

Ancien élève de l'École polytechnique,
directeur des études mathématiques de Saint-Barbe.

TROISIÈME ÉDITION.



PARIS,

LIBRAIRIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT DE FRANCE,
RUE JACOB, 56.

1853.





AVERTISSEMENT

POUR CETTE NOUVELLE ÉDITION.

En publiant cette nouvelle édition des *Éléments de Géométrie* de Legendre, je crois devoir faire connaître les changements qui y ont été introduits.

Aucune modification sérieuse n'a été apportée dans l'ordre des propositions, ce qui n'aurait pu avoir lieu sans altérer profondément le caractère de l'ouvrage; néanmoins j'ai fait tous mes efforts pour le mettre en harmonie avec les programmes de l'enseignement universitaire et des écoles du gouvernement.

Ainsi, pour ne parler que du changement le plus important, j'ai considérablement simplifié les théorèmes relatifs à la mesure du cercle et des corps ronds, sans abandonner toutefois la méthode des limites, mais en n'insistant pas sur certaines difficultés qu'il est peut-être prudent de ne pas faire aborder à des commençants.

J'ai placé, après les huit livres, différents appendices qui peuvent avoir de l'intérêt pour les jeunes gens qui veulent étendre leurs connaissances en géométrie.

Le plus important de ces appendices, qui d'ailleurs est tout à fait nouveau dans l'ouvrage, contient des notions sur la théorie des transversales, sur la division harmonique et le faisceau harmonique, enfin sur la théorie des polaires.

Ces notions sont élémentaires, mais me paraissent suffisantes pour initier les élèves à ces théories et leur faire apprécier le parti qu'on en peut tirer pour la résolution des problèmes.

Quelques changements ont été aussi introduits dans la forme de l'ouvrage. Toutes les figures ont été placées dans le texte, ce qui rend la lecture plus facile; et le volume a été diminué par la suppression de l'ancien texte de Legendre, ce qui a permis aux éditeurs de diminuer le prix de l'ouvrage.

A. BLANCHET.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

I. Tout corps occupe dans l'espace indéfini un lieu déterminé qu'on appelle *volume*.

II. La *surface* d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.

III. Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelé *ligne*.

IV. Un *point* est le lieu où deux lignes se coupent.

V. On conçoit les volumes, les surfaces, les lignes, indépendamment des corps auxquels ils appartiennent.

VI. On donne le nom de figures aux volumes, aux surfaces et aux lignes.

VII. La *géométrie* a pour objet la mesure de l'étendue des figures, et l'étude de leurs propriétés.

VIII. La *ligne droite* est une ligne indéfinie qui est la plus courte entre deux quelconques de ses points.

On doit regarder comme évident que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite, et que si deux portions de lignes droites coïncident, ces lignes coïncident dans toute leur étendue.

IX. Une ligne brisée ou polygonale est une ligne composée de lignes droites..

X. Toute ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites, est une ligne courbe.

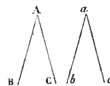
XI. Le *plan* est une surface dans laquelle prenant deux points à volonté, et joignant ces deux points par une droite, cette ligne est tout entière dans la surface.

XII. Toute surface qui n'est ni plane, ni composée de surfaces planes, est une surface courbe.



XIII. La figure formée par deux droites AB, AC qui se coupent, s'appelle angle. Le point A est le sommet de l'angle; les lignes AB, AC, en sont les côtés.

L'angle se désigne quelquefois par la lettre du sommet A; d'autres fois par trois lettres BAC ou CAB, en ayant soin de mettre la lettre du sommet au milieu.



Deux angles A et a sont dits égaux, lorsqu'on peut les faire coïncider. Ainsi, supposons qu'on porte l'angle a sur A, de manière que ab s'applique sur AB : si ac prend la direction AC, les côtés des deux angles coïncideront, et les deux angles seront dits égaux.



Un angle A est double, triple, etc., de l'angle D, s'il renferme entre ses côtés deux, trois... angles égaux à l'angle D.

Les angles sont donc comparables entre eux comme les autres grandeurs.



XIV. Lorsque la ligne droite AB rencontre une autre droite CD, de telle sorte que les angles adjacents BAC, BAD, soient égaux entre eux, la ligne AB est dite perpendiculaire sur CD, et les angles égaux BAC, BAD sont appelés *angles droits*.

Il sera démontré que par un point A pris sur une droite CD on peut toujours élever une perpendiculaire sur cette droite, et que tous les angles droits sont égaux entre eux.

Tout angle plus grand qu'un angle droit est un angle obtus; tout angle plus petit qu'un angle droit est un angle aigu.

On appelle angles supplémentaires deux angles dont la somme est égale à deux droits; et angles complémentaires, deux angles dont la somme vaut un droit.

XV. Deux lignes sont dites *parallèles*, lorsque, étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre. Telles sont les lignes AB, CD.



XVI. La *figure plane* est un plan terminé de toutes parts par des lignes.

Si les lignes sont droites, l'espace qu'elles renferment s'appelle *figure rectiligne* ou *polygon*, et les lignes elles-mêmes prises ensemble forment le contour ou *périmètre* du polygone.

XVII. Le polygone de trois côtés est le plus simple de tous, il s'appelle *triangle*; celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère*; celui de cinq, *pentagone*; celui de six, *hexagone*, etc.



XVIII. On appelle triangle *équilateral*, celui qui a ses trois côtés égaux; triangle *isocèle*, celui dont deux côtés seulement sont égaux; triangle *scalène*, celui qui a ses trois côtés inégaux.



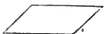
XIX. Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypoténuse*: ainsi ABC est un triangle rectangle en A; le côté BC est son hypoténuse.



XX. Parmi les quadrilatères on distingue :
Le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits.



Le *rectangle*, qui a les angles droits sans avoir les côtés égaux.



Le *parallélogramme*, qui a les côtés opposés parallèles.



Le *losange*, dont les côtés sont égaux sans que les angles soient droits.



Enfin le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles.

XXI. On appelle *diagonale* d'un polygone, la ligne qui joint les sommets de deux angles non adjacents.

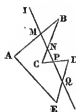
XXII. Le polygone *équilatéral* est celui dont tous les côtés sont égaux ; le polygone *équiangle*, celui dont tous les angles sont égaux.

XXIII. Deux polygones sont *équilatéraux entre eux* lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun, et placés dans le même ordre, c'est-à-dire, lorsqu'en suivant leurs contours dans un même sens, le premier côté de l'un est égal au premier de l'autre, le second de l'un au second de l'autre, le troisième au troisième, et ainsi de suite. On entend de même ce que signifient deux polygones *équiangles entre eux*.

Dans l'un ou l'autre cas, les côtés égaux ou les angles égaux s'appellent côtés ou angles *homologues*.



XXIV. On appelle polygone *convexe*, un polygone tel que, si l'on prolonge un quelconque de ses côtés, tout le polygone soit situé d'un même côté de cette droite. Tel est le polygone ABCDE.



Le périmètre d'un polygone convexe ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points; car, si une droite IQ rencontrait le périmètre ABCDE aux points M, N, P, Q, le côté BC, qui est rencontré par la droite en l'un des points intermédiaires N, aurait évidemment des parties de la figure situées de part et d'autre de sa direction.

XXV. Deux figures quelconques, volumes, surfaces ou lignes, sont dites égales, lorsqu'on peut les appliquer l'une sur l'autre de manière qu'elles coïncident parfaitement.

N. B. Dans les quatre premiers livres il ne sera question que de figures planes ou tracées sur une surface plane.

Explication des termes et des signes.

Axiome est une proposition évidente par elle-même.

Théorème est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*.

Problème est une question proposée qui exige une *solution*.

Lemme est une vérité employée subsidiairement pour la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème.

Le nom commun de *proposition* s'attribue indifféremment aux théorèmes, problèmes et lemmes.

Corollaire est la conséquence qui découle d'une ou de plusieurs propositions.

Scolie est une remarque sur une ou plusieurs propositions précédentes, tendant à faire apercevoir leur liaison, leur utilité, leur restriction ou leur extension.

Hypothèse est une supposition faite, soit dans l'énoncé d'une proposition, soit dans le courant d'une démonstration.

Le signe $=$ est le signe de l'égalité; ainsi l'expression $A=B$ signifie que A égale B.

Pour exprimer que A est plus petit que B, on écrit $A < B$.

Pour exprimer que A est plus grand que B, on écrit $A > B$.

Le signe $+$ se prononce *plus*; il indique l'addition.

Le signe $-$ se prononce *moins*; il indique la soustraction: ainsi $A+B$ représente la somme des quantités A et B; $A-B$ représente leur différence, ou ce qui reste en ôtant B de A; de même $A-B+C$, ou $A+C-B$, signifie que A et B doivent être ajoutés ensemble, et que B doit être retranché du tout.

Le signe $\times$ indique la multiplication; ainsi $A \times B$ représente le produit de A par B. Au lieu du signe $\times$ on emploie quelquefois un point; ainsi $A . B$ est la même chose que $A \times B$. On indique aussi le même produit sans aucun signe intermédiaire par AB ; mais il ne faut employer cette expression que lorsqu'on n'a pas en même temps à employer celle de la ligne AB, distance des points A et B.

L'expression $A \times (B+C-D)$ représente le produit de A par la quantité $B+C-D$. S'il fallait multiplier $A+B$ par $A-B+C$, on indiquerait le produit ainsi $(A+B) \times (A-B+C)$; tout ce qui est renfermé entre parenthèses est considéré comme une seule quantité.

Un nombre mis au-devant d'une ligne ou d'une quantité sert de multiplicateur à cette ligne ou à cette quantité: ainsi, pour exprimer que la ligne AB est prise trois fois, on écrit $3AB$; pour désigner la moitié de l'angle A, on écrit $\frac{1}{2}A$.

Le carré de la ligne AB se désigne par $\overline{AB}$; son cube par $\overline{\overline{AB}}$. On expliquera en son lieu ce que signifient précisément le carré et le cube d'une ligne.

Le signe $\sqrt{}$ indique une racine à extraire; ainsi $\sqrt{2}$ est la racine carrée de 2; $\sqrt{A \times B}$ est la racine du produit $A \times B$, ou la moyenne proportionnelle entre A et B.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Par un point pris sur une droite on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.

En effet, supposons qu'une droite AM d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A : elle formera deux angles adjacents, MAC, MAB, dont l'un, MAC, d'abord très-petit, ira toujours en croissant, et dont l'autre, MAB, d'abord plus grand que MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.

L'angle MAC, d'abord plus petit que MAB, deviendra donc plus grand que cet angle; par conséquent il y aura une position AM'' de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Corollaire. Tous les angles droits sont égaux.

Soient DC perpendiculaire sur AB, et HG perpendiculaire sur EF; je dis que l'angle DCB est égal à HGF. En effet, si l'on porte la droite EF sur AB, de manière que le point G tombe en C, GH prendra la direction CD; autrement on pourrait, par un point pris sur une droite, élever deux perpendiculaires sur cette droite.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Toute ligne droite CD, qui en rencontre une autre AB, fait avec celle-ci deux angles adjacents ACD, BCD, dont la somme est égale à deux angles droits.

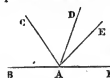
Au point C, élevez sur AB la perpendiculaire CE. L'angle ACD est la somme des angles ACE, ECD; donc $ACD + BCD$ sera la somme des trois ACE, ECD, BCD. Le premier de ceux-ci est droit, les deux autres font ensemble l'angle droit BCE; donc la somme des deux angles ACD, BCD, est égale à deux angles droits.



Corollaire I. Si l'un des angles ACD, BCD, est droit, l'autre le sera pareillement.

Corollaire II. Si la ligne DE est perpendiculaire à AB, réciproquement AB sera perpendiculaire à DE.

Car, de ce que DE est perpendiculaire à AB, il s'ensuit que l'angle ACD est égal à son adjacent DCB, et qu'ils sont tous deux droits. Mais de ce que l'angle ACD est un angle droit, il s'ensuit que son adjacent ACE est aussi un angle droit; donc l'angle $ACE = ACD$, donc AB est perpendiculaire à DE.



Corollaire III. Tous les angles consécutifs BAC, CAD, DAE, EAF, formés d'un même côté de la droite BF, pris ensemble, valent deux angles droits; car leur somme est égale à celle des deux angles adjacents BAC, CAF.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Si deux angles adjacents ACD, DCB, valent ensemble deux angles droits, les deux côtés extérieurs AC, CB, seront en ligne droite.



Car si CB n'est pas le prolongement de AC, soit CE ce prolongement; alors la ligne ACE étant droite, la somme des angles ACD, DCE, sera égale à deux

droits *. Mais, par hypothèse, la somme des angles ACD, DCB, est aussi égale à deux droits; donc $ACD + DCB$ serait égale à $ACD + DCE$; retranchant de part et d'autre l'angle ACD, il resterait l'angle DCB égal à l'angle DCE, ce qui est impossible; donc CB est le prolongement de AC.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Toutes les fois que deux lignes droites AB, DE, se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.

Car, puisque la ligne DE est droite, la somme des angles ACD, ACE, est égale à deux droits; et puisque la ligne AB est droite, la somme des angles ACE, BCE, est égale aussi à deux droits; donc la somme $ACD + ACE$ est égale à la somme $ACE + BCE$. Retranchant de part et d'autre le même angle ACE, il restera l'angle ACD égal à son opposé BCE.

On démontrerait de même que l'angle ACE est égal à son opposé BCD.

Scolie. Les quatre angles formés autour d'un point par deux droites qui se coupent, valent ensemble quatre angles droits; car les angles ACE, BCE, pris ensemble, valent deux angles droits, et les deux autres ACD, BCD, ont la même valeur.

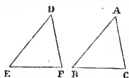


En général, si tant de droites qu'on voudra CA, CB, etc., se rencontrent en un point C, la somme de tous les angles consécutifs ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, sera égale à quatre angles droits; car, si l'on formait au point C quatre angles droits au moyen de deux lignes perpendiculaires entre elles, leur somme serait évidemment égale à celle des angles successifs ACB, BCD, etc.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.



Soit l'angle A égal à l'angle D, le côté AB égal à DE, le côté AC égal à DF; je dis que les triangles ABC, DEF, seront égaux.

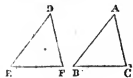
En effet, ces triangles peuvent être posés l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident parfaitement. Et d'abord, si l'on place le côté DE sur son égal AB, le point D tombera en A et le point E en B: mais puisque l'angle D est égal à l'angle A, dès que le côté DE sera placé sur AB, le côté DF prendra la direction AC. De plus, DF est égal à AC; donc le point F tombera en C, et le troisième côté EF couvrira exactement le troisième côté BC; donc le triangle DEF est égal au triangle ABC.

Corollaire. De ce que trois parties sont égales dans deux triangles, savoir, l'angle $A = D$, le côté $AB = DE$, et le côté $AC = DF$, on peut conclure que les trois autres le sont, savoir, l'angle $B = E$, l'angle $C = F$, et le côté $BC = EF$.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.



Soit le côté BC égal au côté EF, l'angle B égal à l'angle E, et l'angle C égal à l'angle F; je dis que le triangle DEF sera égal au triangle ABC.

Car, pour opérer la superposition, soit placé EF sur son égal BC, le point E tombera en B, et le point F en C. Puisque l'angle E est égal à l'angle B, le côté ED prendra la direction BA; ainsi le point D se trouvera sur quelque point de la ligne BA. De même, puisque l'angle F est égal à l'angle C, la ligne FD prendra la direction CA, et le point D se trouvera sur quelque point du côté CA; donc le point D, qui doit se trouver à la fois sur les deux lignes BA, CA, tombera sur leur intersection A; donc les deux triangles ABC, DEF, coïncident l'un avec l'autre et sont parfaitement égaux.

Corollaire. De ce que trois parties sont égales dans deux triangles, savoir, $BC = EF$, $B = E$, $C = F$, on peut conclure que les trois autres le sont, savoir, $AB = DE$, $AC = DF$, $A = D$.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Dans tout triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.



Car la ligne droite BC, par exemple, est le plus court chemin de B en C; donc BC * déf. 8. est plus petit que $AB + AC$.

On doit aussi remarquer qu'un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.

En effet, soit a le plus grand côté, b et c les deux autres; de l'inégalité $a < b + c$, on tire, en retranchant c de part et d'autre, $a - c < b$, et en retranchant b , $a - b < c$.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Si d'un point O pris au dedans du triangle ABC, on mène aux extrémités d'un côté BC les droites OB,

OC, la somme de ces droites sera moindre que celle des deux autres côtés AB, AC.

Fig. 7.

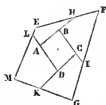


Soit prolongé BO jusqu'à la rencontre du côté AC en D ; la ligne droite OC est plus courte que OD + DC* : ajoutant de part et d'autre BO, on aura BO + OC < BO + OD + DC, ou BO + OC < BD + DC.

On a pareillement BD < BA + AD ; ajoutant de part et d'autre DC, on aura BD + DC < BA + AC. Mais on vient de trouver BO + OC < BD + DC ; donc, à plus forte raison, BO + OC < BA + AC.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.



Toute ligne polygonale convexe ABCD est moindre qu'une ligne quelconque MEFG qui l'enveloppe de toutes parts.

Prolongez dans le même sens les côtés du polygone ABCD, jusqu'à leur rencontre avec la ligne enveloppante, on aura cette suite d'inégalités :

$$AB + BH < AL + LE + EH$$

$$BC + CI < BH + HF + FI$$

$$CD + DK < CI + IG + GK$$

$$DA + AL < DK + KM + ML$$

Ajoutant ces inégalités membre à membre, et supprimant les parties communes aux deux membres, on a $AB + BC + CD + DA < EF + FG + GM + ME$.

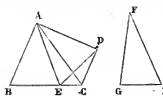
On prouverait de la même manière que toute ligne polygonale convexe est moindre qu'une ligne enveloppante terminée aux mêmes extrémités.

Remarque. Le théorème précédent n'est qu'un cas très-particulier du théorème qu'on vient de démontrer.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun ; si en même temps l'angle compris par les premiers est plus grand que l'angle compris par les seconds, j'en dis que le troisième côté du premier triangle sera plus grand que le troisième côté du second.



Soient les deux triangles ABC, FGH, dans lesquels on a $AB = FG$, $AC = FH$, et l'angle $BAC > GFH$; je dis que le côté BC sera plus grand que GH.

Faites l'angle $CAD = GFH$, prenez $AD = GF$, et joignez CD : les deux triangles ACD, GFH, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux. Il suffit donc de démontrer que BC est plus grand que CD.

Divisez l'angle BAD en deux parties égales par la ligne AE, cette droite tombera dans le plus grand angle BAC ; enfin tirez la ligne DE : les deux triangles BAE, EAD, seront égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux. Donc $BE = ED$. Mais, dans le triangle EDC, on a $CD < ED + EC$. Remplaçant ED par BE, on obtient $CD < BE + EC$ ou $CD < BC$.

Réciproquement, si les côtés AB, AC, du triangle ABC sont égaux aux deux côtés FG, FH, du triangle ACD ; si de plus le troisième côté CB du premier triangle est plus grand que le troisième côté GH du second, l'angle BAC sera plus grand que l'angle GFH.

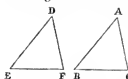
Car, si l'angle BAC était plus petit que CAD, on vient de voir que CB serait plus petit que CD, ce qui est con-

tre l'hypothèse; et si l'angle BAC était égal à CAD, on
 * pr. 5. aurait * $CB = CD$; ce qui est aussi contre la supposition.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.



Soit le côté $AB = DE$, $AC = DF$,
 $BC = EF$, je dis qu'on aura l'angle
 $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Car si l'angle A était plus grand que l'angle D, comme les côtés AB, AC, sont égaux aux côtés DE, DF, chacun à chacun, il s'ensuivrait, par le théorème précédent, que le côté BC est plus grand que EF; et si l'angle A était plus petit que l'angle D, il s'ensuivrait que le côté BC est plus petit que EF: or, BC est égal à EF; donc l'angle A ne peut être ni plus grand ni plus petit que l'angle D; donc il lui est égal. On prouvera de même que l'angle $B = E$, et que l'angle $C = F$.

Scolie. On peut remarquer que les angles égaux sont opposés à des côtés égaux: ainsi les angles égaux A et D sont opposés aux côtés égaux BC, EF.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.



Soit le côté $AB = AC$, je dis qu'on aura l'angle $C = B$.

Tirez la ligne AD du sommet A au point D, milieu de la base BC: les deux triangles ABD, ADC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir, AD com-

mun, $AB = AC$ par hypothèse, et $BD = DC$ par construction ; donc, en vertu du théorème précédent, l'angle B est égal à l'angle C.

Corollaire. Un triangle équilatéral est en même temps équiangle, c'est-à-dire qu'il a ses angles égaux.

Scolie. L'égalité des triangles ABD, ACD, prouve en même temps que l'angle $BAD = DAC$, et que l'angle $BDA = ADC$; donc ces deux derniers sont droits ; donc la ligne menée du sommet d'un triangle isocèle au milieu de sa base est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.

Dans un triangle non isocèle, on prend indifféremment pour base un côté quelconque, et alors son sommet est celui de l'angle opposé. Dans le triangle isocèle, on prend particulièrement pour base le côté qui n'est point égal à l'un des deux autres.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Réciproquement, si deux angles sont égaux dans un triangle, les côtés opposés seront égaux, et le triangle sera isocèle.



Soit l'angle $ABC = ACB$, je dis que le côté AC sera égal au côté AB.

Car si ces côtés ne sont pas égaux, soit AB le plus grand des deux. Prenez $BD = AC$, et joignez DC. L'angle DBC est, par hypothèse, égal à ACB ; les deux côtés DB, BC, sont égaux aux deux AC, CB ; donc le triangle DBC serait égal au triangle ACB. Mais la partie ne peut pas être égale au tout ; donc il n'y a point d'inégalité entre les côtés AB, AC ; donc le triangle ABC est isocèle.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

De deux côtés d'un triangle, celui-là est le plus grand qui est opposé à un plus grand angle; et réciproquement, de deux angles d'un triangle, celui-là est le plus grand, qui est opposé à un plus grand côté.

1° Soit l'angle $C > B$, je dis que le côté AB , opposé à l'angle C , est plus grand que le côté AC , opposé à l'angle B .
 Soit fait l'angle $BCD = B$; dans le triangle BDC on aura * $BD = DC$. Mais la ligne droite AC est plus courte que $AD + DC$, et $AD + DC = AD + DB = AB$; donc AB est plus grand que AC .

2° Soit le côté $AB > AC$, je dis que l'angle C , opposé au côté AB , sera plus grand que l'angle B , opposé au côté AC .
 Car, si on avait $C < B$, il s'ensuivrait, par ce qui vient d'être démontré, $AB < AC$, ce qui est contre la supposition. Si on avait $C = B$, il s'ensuivrait * $AB = AC$, ce qui est encore contre la supposition; donc il faut que l'angle C soit plus grand que B .

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

D'un point donné hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur cette droite.



Supposons que du point A on puisse mener sur CD deux perpendiculaires AE , AB ; prolongeons l'une d'elles AE d'une quantité $EA' = AE$, et joignons $A'B$.

Le triangle AEB est égal au triangle $A'EB$;

car les angles AEB , $A'EB$, sont droits; le côté $AE = A'E$ et le côté BE est commun; on en conclut que l'angle $ABE = EBA'$: or l'angle ABE est droit, donc EBA' l'est aussi. Mais, si les angles adjacents ABE , EBA' valent ensemble deux angles droits, il faut que la ligne ABA' soit droite, d'où il résulte qu'entre deux points A et A' on pourrait mener deux lignes droites, ce qui est impossible. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

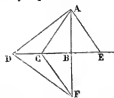
THÉORÈME.

Si d'un point A situé hors d'une droite DE on mène la perpendiculaire AB sur cette droite, et différentes obliques AE, AC, AD, etc., à différents points de cette même droite :

1° *La perpendiculaire AB sera plus courte que toute oblique ;*

2° *Les deux obliques AC, AE, menées de part et d'autre de la perpendiculaire à des distances égales BC, BE, seront égales ;*

3° *De deux obliques AC et AD, ou AE et AD, menées comme on voudra, celle qui s'écarte le plus de la perpendiculaire sera la plus longue.*



Prolongez la perpendiculaire AB d'une quantité $BF = AB$, et joignez FC, FD.

1° Le triangle BCF est égal au triangle BCA, car l'angle droit $CBF = CBA$, le côté CB est commun, et le côté

$BF = BA$; donc * le troisième côté CF est égal au troisième AC. Or, ABF, ligne droite, est plus courte que ACF, ligne brisée; donc AB, moitié de ABF, est plus courte que AC, moitié de ACF; donc, 1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique. * pr. 5.

2° Si on suppose $BE = BC$, comme on a en outre AB commun et l'angle $ABE = ABC$, il s'ensuit que le triangle ABE est égal au triangle ABC * ; donc les côtés AE , AC , sont égaux ; donc, 2° deux obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales.

3° Dans le triangle DFA la somme des lignes AC , CF , est plus petite * que la somme des côtés AD , DF ; donc AC , moitié de la ligne ACF , est plus courte que AD , moitié de ADF ; donc 3°, les obliques qui s'écartent le plus de la perpendiculaire sont les plus longues.

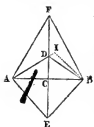
Corollaire I. La perpendiculaire mesure la vraie distance d'un point à une ligne, puisqu'elle est plus courte que toute oblique.

II. D'un même point on ne peut mener à une même ligne trois droites égales : car si cela était, il y aurait d'un même côté de la perpendiculaire deux obliques égales, ce qui est impossible.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Si par le point C, milieu de la droite AB, on élève la perpendiculaire EF sur cette droite, 1° chaque point de la perpendiculaire sera également distant des deux extrémités de la ligne AB ; 2° tout point situé hors de la perpendiculaire sera inégalement distant des mêmes extrémités A et B.



Car, 1° puisqu'on suppose $AC = CB$, les deux obliques AD , DB , s'écartent également de la perpendiculaire ; donc elles sont égales. Il en est de même des deux obliques AE , EB , des deux AF , FB , etc. ; donc 1°, tout point de la perpendiculaire est également distant des extrémités A et B .

2° Soit I un point hors de la perpendiculaire; si on joint IA, IB, l'une de ces lignes coupera la perpendiculaire en D, d'où tirant DB, on aura $DB = DA$. Mais la ligne droite IB est plus petite que la ligne brisée $ID + DB$, et $ID + DB = ID + DA = IA$; donc $IB < IA$; donc 2°, tout point hors de la perpendiculaire est inégalement distant des extrémités A et B.

Remarque. On appelle *lieu géométrique* une ligne dont tous les points jouissent d'une propriété commune, à l'exclusion de tous les autres points du plan.

La ligne EF est donc le lieu géométrique des points également distants des points A et B.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal.



Soit l'hypoténuse $AC = DF$; et le côté $AB = DE$, je dis que le triangle rectangle ABC sera

égal au triangle rectangle DEF.

L'égalité serait manifeste si le troisième côté BC était égal au troisième EF : supposons, s'il est possible, que ces côtés ne soient pas égaux, et que BC soit le plus grand. Prenez $BG = EF$, et joignez AG. Le triangle ABG est égal au triangle DEF; car l'angle droit B est égal à l'angle droit E, le côté $AB = DE$, et le côté $BG = EF$; donc ces deux triangles sont égaux *, et on a par conséquent $AG = DF$; mais, par l'hypothèse, $DF = AC$; donc $AG = AC$. Mais l'oblique AC ne peut être égale à AG *, puisqu'elle est plus éloignée de la perpendiculaire AB; donc il est impossible que BC diffère de EF; donc le triangle ABC est égal au triangle DEF.

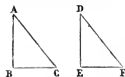
* pr. 5.

* pr. 16.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle égal.



Soit $AC = DF$ et l'angle $A = D$, je porte DEF sur ABC, de manière que DF s'applique sur AC; l'angle D étant égal à l'angle A, DE prendra la direction AB, et en même temps FE prendra la direction CB, car autrement on pourrait du point C abaisser deux perpendiculaires sur AB. Le point E tombera donc en B, et les deux triangles coïncideront parfaitement.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

1° *Tout point M pris sur la bissectrice (*) d'un angle BAD est également distant des côtés de cet angle.*

2° *Tout point M pris dans l'angle BAD, et également distant des côtés AB, AD, appartient à la bissectrice de cet angle.*



1° Abaissez du point M, les droites MD et MC, respectivement perpendiculaires sur AD et sur AB; les triangles rectangles MAD, MAC sont égaux, car ils ont l'hypoténuse MA commune, et les angles MAD, MAC, égaux par hypothèse; donc $MD = MC$.

2° Réciproquement, si les perpendiculaires MD, MC, sont égales, les triangles rectangles MAD, MAC, seront encore égaux, comme ayant l'hypoténuse MA commune,

(*) La bissectrice d'un angle est la ligne qui divise cet angle en deux parties égales.

et les côtés MD, MC, égaux par hypothèse; donc l'angle $MAD = MAC$.

Il résulte de là que tout point pris dans l'angle BAD, hors de la bissectrice AM, est inégalement distant des deux côtés.

Scolie. La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points situés dans l'intérieur de cet angle, qui sont également distants de ses côtés.

THÉORIE DES PARALLÈLES.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.



Deux droites AC, BD, perpendiculaires sur une même droite CD, sont parallèles.

Car, si elles se rencontraient en un point M, par exemple, on pourrait de ce point abaisser deux perpendiculaires sur CD.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Par un point on peut mener une parallèle à une droite.



Du point A abaissez AB perpendiculaire sur BC, et au même point menez AD perpendiculaire sur AB les deux droites AD et BC, étant toutes deux perpendiculaires sur AB, seront parallèles.

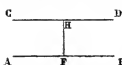
On admettra en second lieu, comme une proposition

évidente, que par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Si deux droites CD, AB, sont parallèles, toute droite FH perpendiculaire sur l'une d'elles AB est perpendiculaire sur l'autre CD.

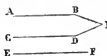


Il est d'abord évident que FH doit rencontrer CD; autrement on pourrait par le point F mener deux parallèles à CD. Enfin CD est perpendiculaire sur FH; car, si la ligne CD était oblique sur FH, on pourrait au point H élever une perpendiculaire sur FH, laquelle serait parallèle à AB, et l'on aurait ainsi deux droites passant par le point H et parallèles à AB.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Deux droites AB, CD, parallèles à une troisième EF sont parallèles entre elles.



Car, si les droites AB, CD, se contraignent en un point M, on pourrait par ce point mener deux parallèles à EF.

DÉFINITIONS.



Lorsque deux droites AB, CD, sont coupées par une transversale EF, il y a huit angles formés aux points d'intersection G et H.

Les quatre angles (1), (4), (5), (8), compris entre les deux droites AB et CD, sont appelés angles internes. Les quatre autres sont appelés angles externes.

Deux angles tels que (1) et (5), situés de part et d'autre de la sécante, internes et non adjacents, sont appelés alternes-internes.

Deux angles tels que (8) et (2), situés d'un même côté de la sécante, l'un interne, l'autre externe et non adjacents, sont appelés angles correspondants.

Enfin des angles tels que (2) et (6), situés de part et d'autre de la sécante, externes et non adjacents, sont appelés alternes-externes.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Deux parallèles forment avec une transversale :

1° *Des angles alternes-internes égaux ;*

2° *Des angles alternes-externes égaux ;*

3° *Des angles correspondants égaux ;*

4° *Des angles intérieurs d'un même côté de la sécante, dont la somme est égale à deux droits ;*

1° Soient les parallèles AB, CD, coupées par la transversale GH. Du point O, milieu de EF, abaissez OM perpendiculaire sur AB ; cette ligne sera également perpendiculaire sur CD. Les triangles rectangles MOE, ONF, sont égaux, car les hypoténuses OE, OF, sont égales par construction, et les angles MOE, FON, sont égaux comme opposés par le sommet. De l'égalité de ces triangles on conclut que les angles alternes-internes MEO, OFN sont égaux.

On voit aussi par là que les angles BEF, EFC, sont égaux, car ces angles sont respectivement les suppléments des angles MEO, OFN.

2° Les angles alternes-externes GEB, CFH, sont égaux, car ils sont opposés par le sommet aux angles alternes-internes MEO, OFN.

3° Les angles correspondants GEB , EFD , sont égaux, car $GEB = AEF$, et $AEF = EFD$.

4° La somme des angles BEF , EFD est égale à deux droits, car on a $BEF + AEF = 2^{\text{dr}}$, et $AEF = EFD$.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

Réciproquement, si deux droites font avec une transversale

Des angles alternes-internes égaux,

Ou des angles alternes-externes égaux,

Ou des angles correspondants égaux,

Ou des angles intérieurs d'un même côté de la sécante, dont la somme soit égale à deux droits,

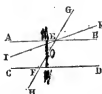
Ces droites sont parallèles.

1° Soient les deux droites AB , CD , coupées par la transversale GH ; si les angles alternes-internes AEF , EFD , sont égaux, AB sera parallèle à CD . Autrement on pourrait par le point E mener une parallèle EI à CD ; mais alors les angles IEF , EFD , seraient égaux comme alternes-internes, et comme par hypothèse $AEF = EFD$, on aurait $AEF = IEF$, ce qui est absurde.

2° Si les angles alternes-externes GEB , CFH , sont égaux, les angles AEF , EFD , qui sont opposés par le sommet aux premiers, seront égaux, et, d'après ce qui vient d'être démontré, AB sera parallèle à CD .

3° Si les angles correspondants GEB , EFD , sont égaux, comme GEB est égal à AEF , on aura $AEF = EFD$; donc AB est parallèle à CD .

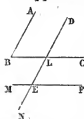
4° Si la somme des angles BEF , EFD , est égale à deux droits, comme $BEF + AEF = 2^{\text{dr}}$, on en conclut $AEF = EFD$; donc AB est parallèle à CD .



PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.



1° Soient ABC , DEF , deux angles dont les côtés sont parallèles et dirigés dans le même sens. Ces angles seront égaux. En effet, les angles DLC , DEF , sont égaux comme angles correspondants. Mais, par la même raison, $DLC = ABC$; donc $ABC = DEF$.

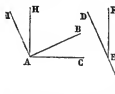
2° Soient deux angles ABC , MEN , dont les côtés sont parallèles, mais dirigés en sens contraire, ces angles seront égaux; car $MEN = DEF$ et $DEF = ABC$.

3° Enfin deux angles ABC , DEM , dont les côtés sont parallèles, mais dont deux côtés BA et ED sont dirigés dans le même sens, et les deux autres BC et EM en sens contraire, sont supplémentaires; car DEM est le supplément de DEF , et $DEF = ABC$.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

Si deux angles ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, ces angles seront égaux ou supplémentaires.



Soient BAC , DEF , deux angles dont les côtés sont perpendiculaires chacun à chacun. Menons par le point A une ligne AI , perpendiculaire à AB , et une droite AH , perpendiculaire à AC ; les droites AI , AH , seront respectivement parallèles aux droites DE , EF ,

et dirigées dans le même sens; donc l'angle IAH est égal à DEF; mais on a $\text{IAH} + \text{HAB} = 1^{\text{droit}}$
 et $\text{BAC} + \text{HAB} = 1^{\text{dr.}}$
 donc $\text{IAH} = \text{BAC}$.

Scolie. Si on considérait l'angle formé par la droite EF et le prolongement de DE, on verrait que l'angle FEG est supplémentaire de l'angle BAC.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.



Menez AE parallèle à BC, et prolongez AC; les angles ACB, EAD, sont égaux comme angles correspondants, par rapport aux parallèles BC, AE, coupées par la transversale AC. Les angles CBA, BAE, sont aussi égaux comme angles alternes-internes, par rapport aux parallèles BC, AE, et à la sécante AB; donc la somme des angles du triangle est égale à la somme des trois angles CAB, BAE, EAD, formés autour du point A, d'un même côté de la droite AC. Or, cette dernière somme est égale à 2 droits; donc la première est égale à 2 droits.

Corollaire I. Dans tout triangle il ne peut y avoir qu'un angle droit, et à plus forte raison qu'un angle obtus.

II. Dans tout triangle rectangle, la somme des deux angles aigus est égale à un droit.

III. Quand on connaît deux angles d'un triangle ou simplement leur somme, on obtient le troisième en retranchant cette somme de deux droits.

IV. L'angle extérieur BAD, formé par le côté BA et le prolongement de AC, est égal à la somme des deux angles intérieurs CBA, BCA.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés, moins deux.



Par un des sommets A, menons des diagonales à tous les sommets non adjacents : le polygone sera décomposé en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux ; car ces différents triangles peuvent être considérés comme ayant pour sommet commun le point A, et pour bases les différents côtés du polygone, excepté les deux triangles extrêmes qui contiennent chacun deux côtés du polygone. On voit aussi que la somme des angles de ces triangles est égale à la somme des angles du polygone ; donc cette dernière somme est égale à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés, moins deux. Si l'on représente par n le nombre de côtés du polygone, la somme des angles sera :

$$2 \times (n - 2) \text{ ou } 2n - 4.$$

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, ainsi que les angles opposés.



Tirez la diagonale BD : les deux triangles ADB, BDC, ont le côté commun BD ; de plus, à cause des parallèles AD, BC, l'angle ADB = DBC *, * pr. 25. et, à cause des parallèles AB, CD, l'angle ABD = BDC ; donc les deux triangles ADB, BDC, sont égaux * ; donc le * pr. 8.

côté AB, opposé à l'angle ADB, est égal au côté DC, opposé à l'angle égal DBC, et pareillement le troisième côté AD est égal au troisième BC; donc les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.

En second lieu, de l'égalité des mêmes triangles il s'ensuit que l'angle A est égal à l'angle C, et aussi que l'angle ADC, composé des deux angles ADB, BDC, est égal à l'angle ABC, composé des deux angles DBC, ABD; donc les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux. 

Corollaire I. Donc deux parallèles AB, CD, comprises entre deux autres parallèles AD, BC, sont égales.

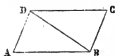
Corollaire II. Deux parallèles sont partout également distantes.

 Car CD et AB étant parallèles, abaissez des points H et G, HF et GE, perpendiculaires sur AB, ces droites seront parallèles, et seront égales comme étant comprises entre parallèles.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

Si dans un quadrilatère ABCD les côtés opposés sont égaux, en sorte qu'on ait $AB=CD$, et $AD=BC$, les côtés égaux seront parallèles, et la figure sera un parallélogramme.



Car, en tirant la diagonale BD, les deux triangles ABD, BDC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun; donc ils seront égaux; donc l'angle ADB, opposé au côté AB, est égal à l'angle DBC, opposé au côté CD; donc * le côté AD est parallèle à BC. Par une semblable raison, AB est parallèle à CD; donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

* pr. 26.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÈME.

Si deux côtés opposés AB, CD, d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, les deux autres côtés seront pareillement égaux et parallèles, et la figure ABCD sera un parallélogramme.

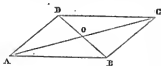


Soit tirée la diagonale BD; puisque AB est parallèle à CD, les angles alternes-internes ABD, BDC, sont égaux * : d'ailleurs le côté $AB = DC$, le côté DB * pr. 25. est commun, donc le triangle ABD est égal au triangle DBC *; donc le côté $AD = BC$, l'angle $ADB = DBC$, et * pr. 5. par conséquent AD est parallèle à BC; donc la figure ABCD est un parallélogramme.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÈME.

Les deux diagonales AC, DB, d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.



Car, en comparant le triangle ADO au triangle COB, on trouve le côté $AD = CB$, l'angle $ADO = CBO$ *; et l'angle * pr. 25. $DAO = OCB$; donc ces deux triangles sont égaux *; donc AO, côté opposé à l'angle * pr. 6. ADO, est égal à OC, côté opposé à l'angle OBC; donc aussi $DO = OB$.

Scolie. Dans le cas du losange, les côtés AB, BC, étant égaux, les triangles AOB, OBC, ont les trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égaux; d'où il suit que l'angle $AOB = BOC$, et qu'ainsi les deux diagonales d'un losange se coupent mutuellement à angles droits.

LIVRE II.

LE CERCLE ET LA MESURE DES ANGLES.

DÉFINITIONS.



I. La *circonférence* du cercle est une ligne courbe, dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle *centre*.

Le *cercle* est la portion de plan terminée par cette ligne courbe.

II. Toute ligne droite CA, CE, CD, etc., menée du centre à la circonférence, s'appelle *rayon*; toute ligne, comme AB, qui passe par le centre, et qui est terminée de part et d'autre à la circonférence, s'appelle *diamètre*.

En vertu de la définition du cercle, tous les rayons sont égaux; tous les diamètres sont égaux aussi, et doubles du rayon.

III. On appelle *arc* une portion de circonférence telle que FHG.

La *corde* ou *sous-tendante* de l'arc est la ligne droite FG qui joint ses deux extrémités.

IV. *Segment* est la surface ou portion de cercle comprise entre l'arc et la corde.

N. B. A la même corde FG répondent toujours deux arcs FHG, FEG, et par conséquent aussi deux segments; mais c'est toujours le plus petit dont on entend parler, à moins qu'on n'exprime le contraire.

V. *Secteur* est la partie du cercle comprise entre un arc DE et les deux rayons CD, CE, menés aux extrémités de cet arc.



VI. On appelle *ligne inscrite dans le cercle*, celle dont les extrémités sont à la circonférence, comme AB ;

Angle inscrit, un angle tel que BAC, dont le sommet est à la circonférence, et qui est formé par deux cordes ;

Triangle inscrit, un triangle tel que BAC, dont les trois angles ont leur sommet à la circonférence ;

Et en général *figure inscrite*, celle dont tous les angles ont leurs sommets à la circonférence ; en même temps on dit que le cercle est *circonscrit* à cette figure.



VII. On appelle *sécante* une ligne qui rencontre la circonférence en deux points : telle est AB.

VIII. *Tangente* est une ligne qui n'a qu'un point de commun avec la circonférence : telle est CD.

Le point commun M s'appelle *point de contact*.

IX. Pareillement deux circonférences sont *tangentes* l'une à l'autre, lorsqu'elles n'ont qu'un point de commun.



X. Un polygone est *circonscrit à un cercle*, lorsque tous ses côtés sont des tangentes à la circonférence ; dans le même cas on dit que le cercle est *inscrit dans le polygone*.



N. B. On appelle en général *tangente à une courbe* la limite des positions que prend une sécante AB qui tourne autour d'un point A de la courbe, jusqu'à ce qu'un second point de section vienne se confondre avec le premier.

Si la courbe est fermée, et ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points, comme le cercle par exemple, il est évident que, lorsque les deux points d'intersection seront réunis en un seul, la droite n'aura plus qu'un point commun avec la courbe, et l'on pourra, si l'on veut, appeler *tangente* une droite qui n'a qu'un point commun avec la courbe. Mais la première définition convient seule à toutes les courbes, et, même en la restreignant au cercle, elle a l'avantage de montrer des analogies remarquables entre plusieurs théorèmes.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Tout diamètre AB divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.



Car si on applique la figure AEB sur AFB, en conservant la base commune AB, il faudra que la ligne courbe AEB tombe exactement sur la ligne courbe AFB, sans quoi il y aurait dans l'une ou dans l'autre des points inégalement éloignés du centre, ce qui est contre la définition du cercle.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Toute corde est plus petite que le diamètre.



Car, si aux extrémités de la corde AD on mène les rayons AC, CD, on aura la ligne droite $AD < AC + CD$, ou $AD < AB$.

Corollaire. Donc la plus grande ligne droite qu'on puisse inscrire dans un cercle est égale à son diamètre.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.

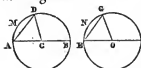
Car, si elle la rencontrait en trois, ces trois points seraient également distants du centre; il y aurait donc trois droites égales menées d'un même point sur une même ligne droite,

• 16, 1. ce qui est impossible *.

* PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales, et réciproquement les cordes égales sous-tendent des arcs égaux.



Le rayon AC étant égal au rayon EO, et l'arc AMD égal à l'arc ENG, je dis que la corde AD sera égale à la corde EG.

Car, le diamètre AB étant égal au diamètre EF, le demi-cercle AMDB pourra s'appliquer exactement sur le demi-cercle ENGF, et la ligne courbe AMDB coïncidera entièrement avec la ligne courbe ENGF. Mais on suppose la portion AMD égale à la portion ENG; donc le point D tombera sur le point G; donc la corde AD est égale à la corde EG.

Réciproquement, en supposant toujours le rayon $AC = EO$, si la corde $AD = EG$, je dis que l'arc AMD sera égal à l'arc ENG.

Car, en tirant les rayons CD, OG, les deux triangles ACD, EOG, auront les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir: $AC = EO$, $CD = OG$, et $AD = EG$; donc ces triangles sont égaux*; donc l'angle $ACD = EOG$. Mais en posant le demi-cercle ADB sur son égal EGF, puisque l'angle $ACD = EOG$, il est clair que le rayon CD tombera sur le rayon OG, et le point D sur le point G; donc l'arc AMD est égal à l'arc ENG. * 11, 1

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, un plus grand arc est sous-tendu par une plus grande

corde, et réciproquement, si toutefois les arcs dont il s'agit sont moindres qu'une demi-circonférence.



Car, soit l'arc AH plus grand que ENG; prenons l'arc AMD = ENG, les cordes AD, EG, seront égales. Enfin menons les rayons DC, CH : les deux côtés AC, CH,

du triangle ACH sont égaux aux deux côtés AC, CD, du triangle ACD; l'angle ACH est plus grand que ACD; donc le troisième côté AH est plus grand que le troisième côté AD; donc aussi AH est plus grand que EG.

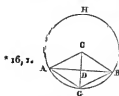
Réciproquement, si la corde AH est plus grande que EG, l'arc AMH sera plus grand que ENG; car si AMH était égal à ENG, la corde AH serait égale à EG, ce qui est contre l'hypothèse; et si l'arc AMH était plus petit que ENG, la corde AH serait plus petite que EG, ce qui est encore contre la supposition.

Scolie. Nous supposons que les arcs dont il s'agit soient moindres qu'une demi-circonférence; s'ils étaient plus grands, la propriété contraire aurait lieu.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Le rayon CG, perpendiculaire à une corde AB, divise cette corde et l'arc sous-tendu AGB, chacun en deux parties égales.



* 16, 1.

Menez les rayons CA, CB; ces rayons sont, par rapport à la perpendiculaire CD, deux obliques égales; donc ils s'écartent également de la perpendiculaire*; donc $AD = DB$.

En second lieu, puisque $AD = DB$, CG est une perpendiculaire élevée sur le milieu de AB; donc * tout point de cette perpendiculaire doit être également distant des deux extrémités A et B. Le point

* 17, 1.

G est un de ces points; donc la distance $AG = BG$. Mais, si la corde AG est égale à la corde GB, l'arc AG sera égal à l'arc GB*; donc le rayon CG, perpendiculaire à la corde * pr. 4. AB, divise l'arc sous-tendu par cette corde en deux parties égales au point G.

Scolie. La droite CG passe par le centre, par le milieu de la corde, par le milieu de l'arc; enfin elle est perpendiculaire sur la corde. Or deux de ces conditions suffisent pour déterminer la position d'une droite; donc toute ligne droite qui sera assujettie à deux de ces conditions remplira nécessairement les deux autres.

Ainsi la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde passera par le centre et par le milieu de l'arc, et ainsi de suite.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Par trois points A, B, C, non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence, mais on n'en peut faire passer qu'une.



Joignez AB, BC, et par les milieux de ces droites élevez les perpendiculaires DE, FG : je dis d'abord que ces deux lignes se rencontreront.

Car, si les droites DE, FG, étaient parallèles, les lignes BA, BC, menées par le point B perpendiculairement à ces parallèles, seraient dans le prolongement l'une de l'autre; ce qui est contre l'hypothèse.

Maintenant le point de concours O des deux droites DE, FG, appartenant à la perpendiculaire DE, est à égale distance des deux points A et B; le même point O, appartenant à la perpendiculaire FG, est à égale distance des deux points B et C; donc les trois distances OA, OB, OC, sont

3.

égales; donc la circonférence décrite du centre O et du rayon OB passera par les trois points A, B, C.

Je dis de plus qu'aucune autre circonférence ne peut passer par ces trois points; car, s'il en existait une, son centre devrait se trouver à la fois sur les lignes DE et FG; or ces deux droites ne peuvent se couper qu'en un point; donc, etc.

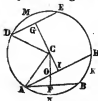
Corollaire I. La perpendiculaire élevée sur le milieu de AC passera par le point O, puisque ce point est à égale distance des points A et C; donc *les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point.*

II. Deux circonférences ne peuvent avoir plus de deux points communs sans se confondre.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Deux cordes égales sont également éloignées du centre; et, de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre.



1° Soit la corde $AB = DE$: divisez ces cordes en deux par les perpendiculaires CF, CG, et tirez les rayons CA, CD.

Les triangles rectangles CAF, DCG, ont les hypoténuses CA, CD, égales; de plus le côté AF, moitié de AB, est égal au côté DG, moitié de DE; donc ces triangles sont
* 18, 1. égaux*, et le troisième côté CF est égal au troisième CG; donc, 1° les deux cordes égales AB, DE, sont également éloignées du centre.

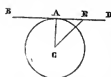
2° Soit la corde AH plus grande que DE, l'arc AKH
* pr. 5. sera plus grand que l'arc DME*: sur l'arc AKH prenez la partie ANB = DME, tirez la corde AB, et abaissez CF perpendiculaire sur cette corde, et CI perpendiculaire

sur AH ; il est clair que CF est plus grand que CO, et CO plus grand que CI ; donc à plus forte raison $CF > CI$. Mais $CF = CG$, puisque les cordes AB, DE, sont égales ; donc on a $CG > CI$; donc, de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

La perpendiculaire BD, menée à l'extrémité du rayon CA, est une tangente à la circonférence.



Car toute oblique CE est plus longue que la perpendiculaire CA ; donc le point E est hors du cercle ; donc la ligne BD n'a que le point A commun avec la circonférence ; donc BD est une tangente.

Réciproquement. Le rayon CA, mené au point de contact de la tangente BD, est perpendiculaire sur cette tangente.

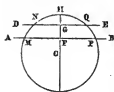
Car tous les points de cette ligne, à l'exception du point A, étant extérieurs à la circonférence, le rayon CA sera la ligne la plus courte qu'on puisse mener du point C à la droite BD, et par conséquent sera perpendiculaire à cette droite.

Corollaire. Par un point A pris sur la circonférence on ne peut mener qu'une seule tangente.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Deux parallèles AB, DE, interceptent sur la circonférence des arcs égaux MN, PQ.



Il peut arriver trois cas :

1° Si les deux parallèles sont sécantes, menez le rayon CH perpendiculaire à la corde MP, il sera en même temps perpendiculaire à sa parallèle NQ ; donc le point H sera à la fois le milieu de

- *6. l'arc MHP et celui de l'arc NHQ* ; on aura donc l'arc $MH = HP$, et l'arc $NH = HQ$: de là résulte $MH - NH = HP - HQ$, c'est-à-dire $MN = PQ$.

2° Si des deux parallèles AB, DE, l'une est sécante, l'autre tangente, au point de contact H menez le rayon CH ; ce rayon sera perpendiculaire à la tangente DE*, et aussi à sa parallèle MP. Mais, puisque CH est perpendiculaire à la corde MP, le point H est le milieu de l'arc MHP ; donc les arcs MH, HP, compris entre les parallèles AB, DE, sont égaux.

3° Enfin si les deux parallèles DE, IL, sont tangentes, l'une en H, l'autre en K, menez la sécante parallèle AB : vous aurez, par ce qui vient d'être démontré, $MH = HP$ et $MK = KP$; donc l'arc entier $HMK = HPK$, et de plus on voit que chacun de ces arcs est une demi-circonférence.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Si deux circonférences ont un point commun A en dehors de la ligne CC' qui unit leurs centres, elles ont un deuxième point commun A' situé sur la perpendiculaire AB à CC', et à la même distance de cette droite que le point A.



En effet, A'B étant égal à AB, les droites CA, CA', seront égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire CB à la droite AA'. Donc le cercle décrit du point C comme centre avec CA pour rayon passera par le point A' ; on verrait de même que le cercle décrit du point C' comme centre avec C'A pour rayon, doit passer par le point A'.

Corollaire I. Quand deux circonférences se coupent, la

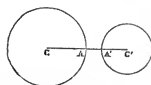
ligne qui unit les centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

H. Si deux circonférences sont tangentes, le point de contact est situé sur la ligne des centres; car, s'il en était autrement, les circonférences auraient un second point commun, et par conséquent se couperaient.

Deux circonférences ne peuvent occuper l'une par rapport à l'autre que cinq positions différentes : elles peuvent être extérieures ou intérieures; elles peuvent se toucher extérieurement ou intérieurement, ou enfin se couper.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

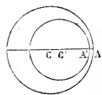


Si deux circonférences sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.

Car on a $CC' = CA + C'A + AA'$, d'où $CC' > CA + C'A$.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

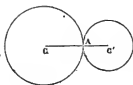


Si deux circonférences sont intérieures, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.

Car on a $CC' = CA - C'A - A'A$, d'où $CC' < CA - C'A$.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.



Si deux circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons.

Car, le point de contact A étant

sur la ligne des centres, on a évidemment $CC' = CA + AC'$.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.



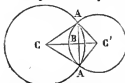
Si deux circonférences se touchent intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.

Car le point de contact A est sur la ligne des centres, et l'on a $CC' = CA - C'A$. /

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Si deux circonférences se coupent, la distance des centres sera en même temps plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence.



Car, en joignant les centres à l'un des points d'intersection A, on formera un triangle dans lequel la ligne des centres CC' , et les rayons $CA, C'A$, seront les trois côtés; or on a vu que

dans un triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.

Les réciproques des cinq propositions précédentes sont vraies, et se démontrent toutes de la même manière; par exemple, si la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les circonférences se coupent; car, si elles étaient extérieures ou intérieures, la distance des centres serait plus grande que la somme des rayons, ou plus petite que leur différence; et si elles étaient tangentes, la distance des centres serait égale à la somme des rayons ou à leur différence.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles égaux ACB , DCE , dont le sommet est au centre, interceptent sur la circonférence des arcs égaux AB , DE .

Réciproquement, si les arcs AB , DE , sont égaux, les angles ACB , DCE , seront aussi égaux.



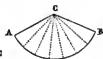
Car, 1° si l'angle ACB est égal à l'angle DCE , ces deux angles pourront se placer l'un sur l'autre; et comme leurs côtés sont égaux, il est clair que le point A tombera en D , et le point B en E . Mais alors l'arc AB doit aussi tomber sur l'arc DE ; car, si les deux arcs n'étaient pas confondus en un seul, il y aurait dans l'un ou dans l'autre des points inégalement éloignés du centre, ce qui est impossible; donc l'arc $AB = DE$.

2° Si on suppose $AB = DE$, je dis que l'angle ACB sera égal à DCE ; car, si ces angles ne sont pas égaux, soit ACB le plus grand, et soit pris $ACI = DCE$; on aura, par ce qui vient d'être démontré, $AI = DE$; mais, par hypothèse, l'arc $AB = DE$; donc on aurait $AI = AB$, ou la partie égale au tout, ce qui est impossible; donc l'angle $ACB = DCE$.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre est le même que celui des arcs interceptés entre leurs côtés.



Soient ACB , DCE , deux angles au centre de circonférences égales. Je supposerai d'abord que les arcs AB et DE

aient une commune mesure, et qu'elle soit contenue 7 fois dans AB, et 4 fois dans DE; le rapport de AB à DE sera $\frac{7}{4}$.

Maintenant, si l'on joint les points de division des deux arcs aux centres des circonférences, on voit que l'angle ACB sera divisé en 7 angles égaux entre eux comme comprenant entre leurs côtés des arcs égaux, et que l'angle DCE contiendra 4 des mêmes angles. Le rapport des arcs AB et DE sera donc aussi $\frac{7}{4}$.



Si les arcs AB et DE sont incommensurables, divisons l'arc DE en trois parties égales, par exemple, et supposons que l'arc AB contienne $\frac{4}{3}$ de ces parties avec un reste KB plus petit que l'une d'elles; le rapport de AB à DE est plus grand que $\frac{4}{3}$, et plus petit que $\frac{5}{3}$.

Mais, si l'on joint les centres C, F, aux points de division des arcs, on voit que l'angle DFE est divisé en trois parties égales, et que l'angle ACB contient 4 de ces parties, avec un reste KCB plus petit que l'une d'elles; le rapport des angles ACB, DFE, est donc aussi compris entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$; donc les rapports ACB : DFE, et AB : DE sont compris tous deux entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$. Mais, en divisant l'arc DE en 10, 100, 1000... parties, on prouverait semblablement que ces rapports sont compris entre deux nombres consécutifs de dixièmes, de centièmes....; donc ces rapports sont égaux, car on vient de prouver qu'ils sont compris entre des nombres dont la différence peut devenir aussi petite qu'on voudra.

Mesure des angles.

Mesurer une grandeur, c'est trouver le rapport de cette grandeur à l'unité de même espèce. La mesure d'un angle, en prenant pour unité l'angle droit, n'est donc autre chose que le rapport de cet angle à un droit.

Mais le théorème précédent montre qu'au rapport de

deux angles au centre, on peut substituer le rapport des arcs compris entre leurs côtés. Ainsi, au lieu de comparer directement un angle à l'angle droit, on pourra comparer l'arc compris entre ses côtés au quart de la circonférence; et c'est dans ce sens qu'on dit d'une manière abrégée qu'un angle au centre a pour mesure l'arc intercepté par ses côtés.

Pour faciliter cette comparaison, on divise la circonférence en 360 parties égales appelées degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60'', etc.

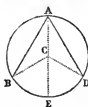
Si l'arc intercepté par les côtés d'un angle au centre renferme 24 degrés, la mesure de cet angle sera $\frac{24}{90}$ ou $\frac{4}{15}$.

Scolie. En répétant littéralement la démonstration du théorème précédent, on prouverait que deux secteurs pris dans des cercles égaux sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

L'angle inscrit BAD a pour mesure la moitié de l'arc BD compris entre ses côtés.



Supposons d'abord que le centre du cercle soit situé dans l'angle BAD, on mènera le diamètre AE et les rayons CB, CD. L'angle BCE, extérieur au triangle ABC, est égal à la somme des deux intérieurs CAB, ABC* : mais, le triangle BAC étant isocèle, l'angle CAB = ABC; donc l'angle BCE est double de BAC. L'angle BCE, comme angle au centre, a pour mesure l'arc BE; donc l'angle BAC aura pour mesure la moitié de BE. Par une raison semblable, l'angle CAD aura pour mesure la moitié de ED; donc BAC + CAD ou BAD aura pour mesure la moitié de BE + ED ou la moitié de BD.



Supposons, en second lieu, que le centre C soit situé hors de l'angle BAD : alors menant le diamètre AE, l'angle BAE aura pour mesure la moitié de BE, l'angle DAE la moitié de DE; donc leur différence BAD aura pour mesure la moitié de BE moins la moitié de ED, ou la moitié de BD.

Donc tout angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.



Corollaire I. Tous les angles BAC, BDC, etc., inscrits dans le même segment sont égaux, car ils ont pour mesure la moitié du même arc BOC.

II. Tout angle inscrit dans le demi-cercle est un angle droit; car il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence, ou le quart de la circonférence.

III. Tout angle BAC, inscrit dans un segment plus grand que le demi-cercle, est un angle aigu; car il a pour mesure la moitié de l'arc BOC, moindre qu'une demi-circonférence.

Et tout angle BOC, inscrit dans un segment plus petit que le demi-cercle, est un angle obtus; car il a pour mesure la moitié de l'arc BAC plus grand qu'une demi-circonférence.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

L'angle BAC, formé par une tangente et une corde, a pour mesure la moitié de l'arc AMDC compris entre ses côtés.



* 9.

Au point de contact A menez le diamètre AD : l'angle BAD est droit *, il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence AMD; l'angle DAC a pour mesure la moitié de DC; donc $BAD + DAC$ ou BAC a pour mesure la moitié de AMD,

plus la moitié de DC, ou la moitié de l'arc entier AMDC.

On démontrerait de même que l'angle CAE a pour mesure la moitié de l'arc AC compris entre ses côtés.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

L'angle BAC, formé par les deux sécantes BE, AC, et dont le sommet est dans l'intérieur de la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre les prolongements des mêmes côtés.

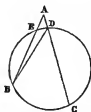


En effet, l'angle BAC, extérieur au triangle AEC, est égal à la somme des angles AEC, ACE, qui ont respectivement pour mesure les arcs BC et DE.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

L'angle BAC, formé par les deux sécantes AB, AC, et dont le sommet est hors de la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc concave BC, moins la moitié de l'arc convexe DE.



Car l'angle A est égal à la différence des angles BDC, ABD, qui ont pour mesure, le premier la moitié de BC, et le second la moitié de DE.

La proposition est encore vraie, lorsque l'un des côtés de l'angle ou bien les deux sont tangents à la circonférence, et la démonstration est la même.



Corollaire. L'arc de cercle BAC est le lieu géométrique des sommets des angles égaux à CDB, et dont les côtés passent par les points C et B. Car, 1° tout angle inscrit dans le segment BAC est égal à CDB; 2° tout angle CMB dont le sommet est dans l'intérieur du segment est plus grand que CDB; en effet, prolongeons CM jusqu'à la circonférence en N, et joignons NB; l'angle CMB, extérieur au triangle MNB, est plus grand que l'angle intérieur MNB; mais l'angle MNB = CDB, donc on a

$$CMB > CDB.$$

3° On verrait semblablement que tout angle CGB, dont le sommet est extérieur au segment, est plus petit que CDB.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Dans tout quadrilatère inscrit ABCD, les angles opposés sont supplémentaires.



En effet, les angles opposés ADC, ABC, ont ensemble pour mesure la moitié de la circonférence ABCD.

Réciproquement, si, dans un quadrilatère, deux angles opposés ADC, ABC, sont supplémentaires, ce quadrilatère est inscriptible.

En effet, faisons passer une circonférence par les trois points A, D, C : l'angle ADC aura pour mesure la moitié de l'arc AMC; donc l'angle ABC, qui est le supplément du premier, a pour mesure la moitié de l'arc restant ADC, c'est-à-dire qu'il est égal à chacun des angles inscrits dans le segment AMC; or ceci ne peut avoir lieu qu'autant que le point B est sur l'arc AMC.

Problèmes relatifs aux deux premiers livres.

PROBLÈME PREMIER.

Diviser la droite donnée AB en deux parties égales.

Des points A et B, comme centres, avec un rayon plus grand que la moitié de AB, décrivez deux arcs qui se coupent en D; le point D sera également éloigné des points A et B. Marquez de même au-dessus ou au-dessous de la ligne AB un second point E également éloigné des points A et B; par les deux points D, E, tirez la ligne DE. Je dis que DE coupera la ligne AB en deux parties égales au point C.

Car, les deux points D et E étant chacun également éloignés des extrémités A et B, ils doivent se trouver tous deux sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Mais par deux points donnés il ne peut passer qu'une seule ligne droite; donc la ligne DE sera cette perpendiculaire elle-même qui coupe la ligne AB en deux parties égales au point C.

PROBLÈME II.

Par un point A, donné sur la ligne BC, élever une perpendiculaire à cette ligne.

Prenez les points B et C à égale distance de A; ensuite des points B et C, comme centres, et d'un rayon plus grand que BA, décrivez deux arcs qui se coupent en D, tirez AD qui sera la perpendiculaire demandée.

Car le point D, étant également éloigné de B et de C, appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC; donc AD est cette perpendiculaire.

Scolie. La même construction sert à faire un angle droit BAD en un point donné A sur une ligne donnée BC.

PROBLÈME III.

D'un point A, donné hors de la droite BD, abaisser une perpendiculaire sur cette droite.



Du point A, comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, décrivez un arc qui coupe la ligne BD aux deux points B et D; marquez ensuite un point E également distant des points B et D, et tirez AE, qui sera la perpendiculaire demandée.

Car les deux points A et E sont chacun également distants des points B et D; donc la ligne AE est perpendiculaire sur le milieu de BD.

PROBLÈME IV.

Au point A de la ligne AB, faire un angle égal à l'angle donné K.



Du sommet K, comme centre, et d'un rayon à volonté, décrivez l'arc IL, terminé aux deux côtés de l'angle; du point A, comme centre, et d'un rayon AB égal à KI, décrivez l'arc indéfini BO; prenez ensuite un rayon égal à la corde LI; du point B, comme centre, et de ce rayon, décrivez un arc qui coupe en D l'arc indéfini BO; tirez AD, et l'angle DAB sera égal à l'angle donné K.

* 4. 2. Car les deux arcs BD, LI, ont des rayons égaux et des cordes égales; donc ils sont égaux*; donc l'angle BAD = IKL.

PROBLÈME V.

Diviser un angle ou un arc donné en deux parties égales.



1° S'il faut diviser l'arc AB en deux parties égales, des points A et B, comme centres, et avec un même rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en D; par le point D et par le centre C tirez CD, qui coupera l'arc AB en deux parties égales au point E.

Car les deux points C et D sont chacun également distants des extrémités A et B de la corde AB; donc la ligne CD est perpendiculaire sur le milieu de cette corde; donc elle divise l'arc AB en deux parties égales au point E *.

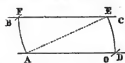
*6. 1.

2° S'il faut diviser en deux parties égales l'angle ACB, on commencera par décrire du sommet C, comme centre, l'arc AB, et le reste comme il vient d'être dit. Il est clair que la ligne CD divisera en deux parties égales l'angle ACB.

Scolie. On peut, par la même construction, diviser chacune des moitiés AE, EB, en deux parties égales; ainsi, par des subdivisions successives, on divisera un angle ou un arc donné en quatre parties égales, en huit, en seize, etc.

PROBLÈME VI.

Par un point donné A, mener une parallèle à la ligne donnée BC.

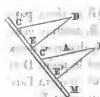


Du point A, comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, décrivez l'arc indéfini EO; du point E, comme centre, et du même rayon, décrivez l'arc AF, prenez $ED = AF$, et tirez AD, qui sera la parallèle demandée.

Car, en joignant AE, on voit que les angles alternes-internes AEF, EAD, sont égaux; donc les lignes AD, EF, sont parallèles *.

26. 1.

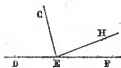
Pour résoudre ce problème, on emploie plus ordinairement l'équerre.



L'équerre a la forme d'un triangle rectangle CDE ; on applique l'hypoténuse sur la ligne CD, à laquelle il faut mener une parallèle par le point A, et le côté CE contre une règle fixe CM, puis on fait glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que l'hypoténuse passe par le point A ; la droite AD' sera parallèle à CD ; car les angles correspondants DCM, AC'M, sont égaux.

PROBLÈME VII.

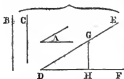
Deux angles A et B d'un triangle étant donnés , trouver le troisième.



Tirez la ligne indéfinie DEF ; faites au point E l'angle $DEC = A$, et l'angle $CEH = B$: l'angle restant HEF sera le troisième angle requis ; car ces trois angles pris ensemble valent deux angles droits.

PROBLÈME VIII.

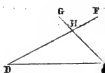
Étant donnés deux côtés B et C d'un triangle et l'angle A qu'ils comprennent , décrire le triangle.



Ayant tiré la ligne indéfinie DE, faites au point D l'angle EDF égal à l'angle donné A ; prenez ensuite $DG = B$, $DH = C$, et tirez GH ; DGH sera le triangle demandé.

PROBLÈME IX.

Étant donnés un côté et deux angles d'un triangle , décrire le triangle.

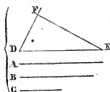


Les deux angles donnés seront ou tous deux adjacents au côté donné, ou l'un adjacent, l'autre opposé : dans ce dernier cas, cherchez le troisième *, vous aurez ainsi les deux angles adjacents.

Cela posé, tirez la droite DE égale au côté donné, faites au point D l'angle EDF égal à l'un des angles adjacents, et au point E l'angle DEG égal à l'autre ; les deux lignes DF, EG, se couperont en H, et DEH sera le triangle requis.

PROBLÈME X.

Les trois côtés A, B, C, d'un triangle étant donnés, décrire le triangle.

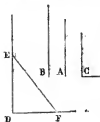


Tirez DE égal au côté A ; du point E, comme centre, et d'un rayon égal au second côté B, décrivez un arc ; du point D, comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté C, décrivez un autre arc qui coupera le premier en F ; tirez DF, EF, et DEF sera le triangle requis.

Pour que le problème soit possible, il faut que les circonférences décrites des points D et F comme centres se coupent ; ce qui exige * que le côté DE soit plus petit que la somme des deux autres côtés, et plus grand que leur différence.

PROBLÈME XI.

Étant donnés deux côtés A et B d'un triangle, avec l'angle C opposé au côté B, décrire le triangle.

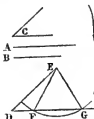


Il y a deux cas : 1° si l'angle C est droit ou obtus, faites l'angle EDF égal à l'angle C ; prenez $DE = A$; du point E, comme centre, et d'un rayon égal au côté donné B, décrivez un arc qui coupe en F la ligne DF ; tirez EF, et DEF sera le triangle demandé.

Il faut, dans ce premier cas, que le côté B soit plus grand que A, car l'angle C, étant droit ou obtus, est le plus grand des angles du triangle ; donc le côté opposé doit être aussi le plus grand.



2° Si l'angle C est aigu, et que B soit plus grand que A, la même construction a toujours lieu, et DEF est le triangle requis.

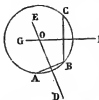


Mais si, l'angle C étant aigu, le côté B est moindre que A, alors l'arc décrit du centre E avec le rayon $EF = B$ coupera le côté DF en deux points F et G, situés du même côté de D ; donc il y aura deux triangles DEF, DEG, qui satisferont également au problème.

Scolie. Le problème serait impossible dans tous les cas, si le côté B était plus petit que la perpendiculaire abaissée de E sur la ligne DF.

PROBLÈME XII.

Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné.



Prenez à volonté dans la circonférence ou dans l'arc trois points A, B, C ; joignez ou imaginez qu'on joigne AB et BC, divisez ces deux lignes en deux parties égales par les perpendiculaires DE, FG ; le point O, où ces perpendiculaires se rencontrent, sera le centre cherché.

Scolie. La même construction sert à faire passer une circonférence par les trois points donnés A, B, C, et aussi à décrire une circonférence dans laquelle le triangle donné ABC soit inscrit.

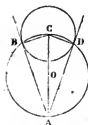
PROBLÈME XIII.

Par un point donné mener une tangente à un cercle donné.



Si le point donné A est sur la circonférence, tirez le rayon CA, et menez AD perpendiculaire à CA ; AD sera la tangente demandée *.

* 9, 2.



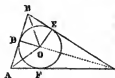
Si le point A est hors du cercle, joignez le point A et le centre par la ligne droite CA ; divisez CA en deux également au point O ; du point O, comme centre, et du rayon OC, décrivez une circonférence qui coupera la circonférence donnée au point B ; tirez AB, et AB sera la tangente demandée.

Car, en menant CB, l'angle CBA, inscrit dans le demi-cercle, est un angle droit * ; donc AB est perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB, donc elle est tangente. * 19, 2.

Scolie. Le point A étant hors du cercle, on voit qu'il y a toujours deux tangentes égales AB, AD, qui passent par le point A : elles sont égales, car les triangles rectangles CBA, CDA ont l'hypoténuse CA commune, et le côté $CB = CD$; donc ils sont égaux * ; donc $AD = AB$, et en même temps l'angle $CAD = CAB$. * 18, 1.

PROBLÈME XIV.

Inscrire un cercle dans un triangle donné ABC.



Menez les bissectrices AO, BO des angles A et B ; ces droites se couperont en un point O, qui sera également distant des trois côtés AB, AC, BC.

Si donc de ce point on abaisse les

perpendiculaires OD, OF, OE sur les côtés du triangle, ces perpendiculaires seront égales, et la circonférence décrite du point O comme centre avec OD comme rayon sera tangente aux trois côtés.

Remarque I. Le point O, étant également distant des côtés BC, AC, appartient à la bissectrice de l'angle C ; donc les trois bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point.



II. Si on mène les bissectrices des deux angles extérieurs MBC, BCN, leur point de concours O' sera le centre d'un cercle tangent au côté BC et aux prolongements des deux autres.

On trouvera de la même manière les centres O'', O''' des deux autres circonférences tangentes à un des côtés du triangle et aux prolongements des deux autres.

Il y a donc en général quatre circonférences tangentes à trois droites données.

PROBLÈME XV.

Sur une droite donnée AB, décrire un segment capable de l'angle donné C, c'est-à-dire un segment tel que tous les angles qui y sont inscrits soient égaux à l'angle donné C.



Prolongez AB vers D, faites au point B l'angle $\text{DBE} = \text{C}$, tirez BO perpendiculaire à BE, et GO perpendiculaire sur le milieu de AB ; du point de rencontre O, comme centre, et du rayon OB, décrivez un cercle : le segment demandé sera AMB.

Car, puisque BF est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB, BF est une tangente, et l'angle ABF a pour mesure la moitié de l'arc AKB* ; d'ailleurs l'angle AMB, comme an-

* 20, 2.

gle inscrit, a aussi pour mesure la moitié de l'arc AKB; donc l'angle $AMB = ABF = EBD = C$; donc tous les angles inscrits dans le segment AMB sont égaux à l'angle donné C.

Scolie. Si l'angle donné était droit, le segment cherché serait le demi-cercle décrit sur le diamètre AB.

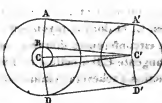
PROBLÈME XVI.

Construire une tangente commune à deux circonférences.

1^o Supposons le problème résolu, et soit AA' une tangente commune extérieure aux deux circonférences. Menons les rayons CA, C'A' aux points de contact, et la droite C'B parallèle à AA'. Les rayons CA, C'A', étant perpendiculaires sur AA', seront aussi perpendiculaires sur la droite C'B; cette dernière ligne sera donc tangente à une circonférence décrite du point B comme centre, avec un rayon CB égal à CA — C'A'.

On déduit de là la construction suivante : décrivez une circonférence du point C comme centre, avec un rayon égal à CA — C'A', et menez par le point C' une tangente à cette circonférence. Connaissant le point B, on tirera la ligne CBA, on mènera C'A' parallèle à CA, et on joindra AA'.

La construction fait voir qu'il ya deux solutions du problème, puisque par le point C' on peut mener deux tangentes à la circonférence CB, et que le problème n'est possible qu'autant que l'on a $CC' \geq CA - C'A'$; ou, en d'autres termes, qu'autant que les circonférences ne sont pas intérieures l'une à l'autre.



sant CD, divisera aussi AI; et divisant AB, elle sera contenue exactement dans le reste IB; ce sera donc une commune mesure de CD et IB.

Réciproquement, toute commune mesure de CD et de IB sera contenue exactement dans AI et dans IB, et par suite dans AB; ce sera donc une commune mesure de AB et de CD.

Ainsi, toutes les communes mesures de AB et de CD sont les mêmes que celles de CD et de IB; la plus grande commune mesure est donc la même.

Portons IB sur CD, et supposons qu'on ait $CD = IB + KD$: on prouvera, comme précédemment, que la plus grande commune mesure entre CD et IB est la même qu'entre IB et KD.

Portons encore KD sur IB, et supposons qu'on ait $IB = 2KD$; KD sera la plus grande commune mesure des deux lignes AB et CD.

On déduit d'ailleurs des égalités ci-dessus :

$$CD = 3.KD$$

$$\text{et } AB = 8.KD;$$

donc le rapport des deux lignes AB et CD est $\frac{8}{3}$.

Remarque. Nous avons supposé ci-dessus qu'on arrivait dans cette série d'opérations à un reste égal à zéro. Nous allons prouver qu'il en est toujours ainsi, quand les deux lignes ont une commune mesure; et que, dans le cas où elles sont incommensurables, on arrive à des restes plus petits que toute grandeur assignable.

En effet, soient A, B, les deux lignes sur lesquelles on opère; $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \dots$ les restes successifs; $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$ les quotients, on aura les égalités

$$A = B q_1 + r_1$$

$$B = r_1 q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3 q_4 + r_4$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Or, r_1 est plus petit que $\frac{A}{2}$; car, si B est plus petit que $\frac{A}{2}$, à plus forte raison r_1 est-il moindre que $\frac{A}{2}$; et si B est plus grand que $\frac{A}{2}$, alors $r_1 = A - B$, donc $r_1 < \frac{A}{2}$.
On aurait de même :

$$r_2 < \frac{r_1}{2}, \text{ d'où } r_2 < \frac{A}{4}$$

$$r_3 < \frac{r_2}{2}, \text{ d'où } r_3 < \frac{A}{8}$$

$$r_4 < \frac{r_3}{2}, \text{ d'où } r_4 < \frac{A}{16},$$

et ainsi de suite.

On voit donc que si l'opération se prolongeait indéfiniment, on arriverait à des restes aussi petits qu'on voudrait; et par conséquent, s'il y a une commune mesure, on arrivera à un reste nul; autrement on tomberait sur des restes plus petits que la commune mesure, ce qui est évidemment absurde d'après la théorie précédente.

Dans le cas où les lignes sont incommensurables, on pourra, après un certain nombre d'opérations, négliger le dernier reste; le reste précédent servira alors de commune mesure, et conduira à une valeur approchée du rapport.

PROBLÈME XVIII.

Deux angles A et B étant donnés, trouver leur commune mesure, s'ils en ont une, et de là leur rapport en nombres.



Décrivez avec des rayons égaux les arcs CD, EF, qui servent de mesure à ces angles; procédez ensuite pour la comparaison des arcs CD, EF, comme dans le problème précédent; car un arc peut être porté sur un arc de

même rayon, comme une ligne droite sur une ligne droite. Vous parviendrez ainsi à la commune mesure des arcs CD, EF, s'ils en ont une, et à leur rapport en nombres. Ce rapport sera le même que celui des angles donnés *; et si DO est la commune mesure des arcs, DAO sera celle des angles. *18, 2.

Si les deux arcs étaient incommensurables, les angles le seraient également, et on n'obtiendrait qu'une valeur approchée de leur rapport.

LIVRE III.

MESURE DES POLYGONES. — SIMILITUDE.

DÉFINITIONS.

I. L'*aire* d'une figure est le rapport de son étendue à celle de l'unité de surface *.

II. Deux figures équivalentes sont celles qui ont la même aire.

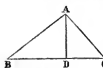
Deux figures peuvent être équivalentes, quoique très-dissemblables : par exemple, un cercle peut être équivalent à un carré, un triangle à un rectangle, etc.

La dénomination de figures égales sera conservée à celles qui, étant appliquées l'une sur l'autre, coïncident dans tous leurs points : tels sont deux cercles dont les rayons sont égaux, deux triangles dont les trois côtés sont égaux chacun à chacun, etc.

III. La *hauteur* d'un parallélogramme est la perpendiculaire EF qui mesure la distance des deux côtés opposés AB, CD, pris pour bases.



IV. La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire AD abaissée du sommet d'un angle A sur le côté opposé BC pris pour base.



V. La *hauteur* du trapèze est la perpendiculaire EF menée entre ses deux côtés parallèles AB, CD.



(*) On confond souvent, dans le discours, l'aire et la surface d'une figure.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Les parallélogrammes qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents.

Soit AB la base commune des deux parallélogrammes ABCD, ABEF; puisqu'ils sont supposés avoir la même hauteur, les bases supérieures DC, FE, seront situées sur une même ligne parallèle à AB. Or on a, par la nature des parallélogrammes, $AD = BC$, et $AF = BE$; par la même raison, on a $DC = AB$, et $FE = AB$; donc $DC = FE$; donc, retranchant DC et FE de la même ligne DE, les restes CE et DF seront égaux.

Il suit de là que les triangles DAF, CBE, sont équilatéraux entre eux, et par conséquent égaux.

Mais, si du quadrilatère ABED on retranche le triangle ADF, il reste le parallélogramme ABEF; et si du même quadrilatère ABED on retranche le triangle CBE, il reste le parallélogramme ABCD; donc les deux parallélogrammes ABCD, ABEF, qui ont même base et même hauteur, sont équivalents.



Corollaire. Tout parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle ABEF de même base et de même hauteur.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Tout triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD qui a même base et même hauteur.



Car les triangles ABC, ACD, sont égaux*. *31, 1.

Corollaire I. Donc un triangle ABC est la moitié du rectangle BCEF qui a même base BC et même hauteur AO; car le rec-

tangle BCEF est équivalent au parallélogramme ABCD.

II. Tous les triangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.



Soient ABCD, AEFD, deux rectangles qui ont pour hauteur commune AD; je dis qu'ils sont entre eux comme leurs bases AB, AE.

Supposons d'abord que les bases AB, AE, soient commensurables entre elles, et qu'elles soient, par exemple, comme les nombres 7 et 4 : si on divise AB en 7 parties égales, AE contiendra 4 de ces parties; élevez à chaque point de division une perpendiculaire à la base, vous formerez ainsi sept rectangles partiels qui seront égaux entre eux, puisqu'ils auront même base et même hauteur. Le rectangle ABCD contiendra sept rectangles partiels, tandis que AEFD en contiendra quatre; donc le rectangle ABCD est au rectangle AEFD comme 7 est à 4, ou comme AB est à AE.

Si les bases AB, AE, étaient incommensurables, on prouverait par le raisonnement déjà employé (liv. 2, prop. 18), que la proposition a encore lieu.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Deux rectangles sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.

Soient R, r, les surfaces des deux rectangles; B, H, les deux dimensions du premier; b, h, les deux dimensions du second.

Imaginons un troisième rectangle R' qui ait même base B que le premier, et même hauteur h que le second.

On aura, en vertu du *théorème* précédent :

$$R : R' :: H : h.$$

$$R' : r :: B : b.$$

Multipliant ces proportions terme à terme, et divisant les deux termes du premier rapport par R' , on a :

$$(1) R : r :: B \times H : b \times h.$$

Mesure du rectangle. Mesurer un rectangle R , c'est trouver son rapport à un certain rectangle r qui serait pris pour unité.

On voit par le *théorème* précédent qu'on obtiendrait ce rapport en cherchant combien de fois les lignes B , H , b , h , contiennent une même unité, et en divisant le produit des deux premiers nombres par le produit des deux derniers.

Soient $B = 6^{\text{mètres}}$, $H = 4^{\text{mètres}}$, $b = 3^{\text{mètres}}$, $h = 2^{\text{mètres}}$.

On aura $\frac{R}{r} = \frac{6 \times 4}{3 \times 2} = 4$. Ainsi le rectangle R contient 4 fois le rectangle pris pour unité.

On prend ordinairement pour unité de surface le carré qui a pour côté l'unité de longueur; alors les nombres qui représentent b et h se réduisant à l'unité, la proportion (1) devient :

$$R : r :: B \times H : 1.$$

On voit donc que le rapport d'un rectangle au carré construit sur l'unité de longueur, est égal au produit des nombres qui expriment combien de fois la base et la hauteur contiennent cette unité linéaire; et c'est ce qu'on exprime d'une manière abrégée, en disant qu'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Soient $B = 3^{\text{m}}, 53$, $H = 2^{\text{m}}, 25$.

La surface du rectangle sera $7^{\text{mètres carrés}}, 9425$, ou $7^{\text{m. c.}}, 94^{\text{décim. c.}}, 25^{\text{centim. c.}}$.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

L'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.



Car le parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle ABEF, qui a même base AB et même hauteur BE; or celui-ci a pour mesure $AB \times BE$, donc $AB \times BE$ est égal à l'aire du parallélogramme ABCD.

Corollaire. Les parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et les parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases; car A, B, C, étant trois grandeurs quelconques, on a généralement $A \times C : B \times C :: A : B$.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

L'aire d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.



• 5.

Car le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCE, qui a même base BC et même hauteur AD : or, la surface du parallélogramme $= BC \times AD$ *; donc celle du triangle $= \frac{1}{2} BC \times AD$, ou $BC \times \frac{1}{2} AD$.

Corollaire. Deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

L'aire du trapèze ABCD est égale à sa hauteur EF, multipliée par la demi-somme des bases parallèles, AB, CD.



Par le point I, milieu du côté CB, menez KL parallèle au côté opposé AD, et prolongez DC jusqu'à la rencontre de KL.

Dans les triangles IBL, ICK, on a le côté $IB = IC$ par construction, l'angle $LIB = CIK$, et l'angle $IBL = ICK$ puisque CK et BL sont parallèles * : * 25, 1. donc ces triangles sont égaux * ; donc le trapèze ABCD est * 6, 1. équivalent au parallélogramme ADKL, et il a pour mesure $EF \times AL$.

Mais on a $AL = DK$, et, puisque le triangle IBL est égal au triangle ICK, le côté $BL = CK$: donc $AB + CD = AL + DK = 2 AL$, et ainsi AL est la demi-somme des bases AB, CD ; donc enfin l'aire du trapèze ABCD est égale à la hauteur EF multipliée par la demi-somme des bases AB, CD, ce qui s'exprime ainsi : $ABCD = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2} \right)$.

Scolie. Si par le point I, milieu de BC, on mène IH, parallèle à la base AB, le point H sera aussi le milieu de AD, car la figure AHIL est un parallélogramme, ainsi que DHIK, puisque les côtés opposés sont parallèles : on a donc $AH = IL$ et $DH = IK$. Or $IL = IK$, puisque les triangles BIL, CIK, sont égaux ; donc $AH = DH$.

On peut remarquer que la ligne $HI = AL = \frac{AB + CD}{2}$; donc l'aire du trapèze peut s'exprimer aussi par $EF \times HI$: elle est donc égale à la hauteur du trapèze multipliée par la ligne qui joint les milieux des côtés non parallèles.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Si une ligne AC est divisée en deux parties AB, BC, le carré fait sur la ligne entière AC contiendra le carré fait sur une partie AB, plus le carré fait sur

l'autre partie BC, plus deux fois le rectangle compris sous les deux parties AB, BC, ce qu'on exprime ainsi :

$$\overline{AC} \text{ ou } (AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 AB \times BC.$$



Construisez le carré ACDE, prenez $AF = AB$, menez FG parallèle à AC, et BH parallèle à AE.

Le carré ABCD est divisé en quatre parties : la première ABIF est le carré fait sur AB, puisqu'on a pris $AF = AB$: la seconde IGDH est le carré fait sur BC ; car puisqu'on a $AC = AE$, et $AB = AF$, la différence $AC - AB$ est égale à la différence $AE - AF$, ce qui donne $BC = EF$. Mais, à cause des parallèles, $IG = BC$, et $DG = EF$; donc HIGD est égal au carré fait sur BC. Ces deux parties étant retranchées du carré total, il reste les deux rectangles BCGI, EFIH, qui ont chacun pour mesure $AB \times BC$; donc le carré fait sur AC, etc.

Scolie. Soient a et b les nombres qui représentent les deux parties de la ligne AC ; la multiplication algébrique donne l'égalité :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$$

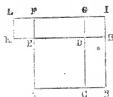
et en supposant connue la mesure du rectangle, cette égalité donne une seconde démonstration du théorème ci-dessus.

Une observation semblable doit être faite sur les deux théorèmes suivants.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Si la ligne AC est la différence des deux lignes AB, BC, le carré fait sur AC contiendra le carré de AB, plus le carré de BC, moins deux fois le rectangle fait sur AB et BC ; c'est-à-dire qu'on aura
 $\overline{AC} \text{ ou } (AB - BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 AB \times BC.$



Construisez le carré ABIF, prenez $AE = AC$, menez CG parallèle à BI, HK parallèle à AB, et achevez le carré EFKL.

Les deux rectangles CBIG, GLKD, ont chacun pour mesure $AB \times BC$: si on les retranche de la figure entière ABILKEA, qui a pour valeur $\overline{AB} + \overline{BC}$, il est clair qu'il restera le carré ACDE; donc, etc.

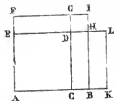
Scolie. Cette proposition se déduit encore de la formule algébrique

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Le rectangle fait sur la somme et la différence de deux lignes AB, BC, est égal à la différence des carrés de ces lignes ; ainsi on a $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB} - \overline{BC}$.



Construisez sur AB et AC les carrés ABIF, ACDE; prolongez AB d'une quantité $BK = BC$, et achevez le rectangle AKLE.

La base AK du rectangle est la somme des deux lignes AB, BC; sa hauteur AE est la différence de ces mêmes lignes : donc le rectangle $AKLE = (AB + BC) \times (AB - BC)$. Mais ce même rectangle est composé des deux parties ABHE + BHLK; et la partie BHLK est égale au rectangle EDGF, car $BH = DE$ et $BK = EF$; donc $AKLE = ABHE + EDGF$. Or ces deux parties forment le carré ABIF moins le carré DHIG, qui est le carré fait sur BC; donc enfin $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB} - \overline{BC}$.

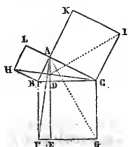
Scolie. Cette proposition se déduit encore de la formule algébrique

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés.



Soit ABC un triangle rectangle en A : ayant formé des carrés sur les trois côtés, abaissez de l'angle droit sur l'hypoténuse la perpendiculaire AD que vous prolongerez jusqu'en E ; tirez ensuite les diagonales AF, CH.

L'angle ABF est composé de l'angle ABC, plus l'angle droit CBF : l'angle CBH est composé du même angle ABC, plus l'angle droit ABH ; donc l'angle ABF = HBC. Mais AB = BH comme côtés d'un même carré, et BF = BC par la même raison : donc les triangles ABF, HBC, ont un angle égal compris entre côtés égaux ; donc ils sont égaux*.

Le triangle ABF est la moitié du rectangle BDEF (ou pour abrégér BE) qui a même base BF et même hauteur BD*. Le triangle HBC est pareillement la moitié du carré AH ; car, l'angle BAC étant droit ainsi que BAL, AC et AL ne font qu'une même ligne droite parallèle à HB ; donc le triangle HBC et le carré AH, qui ont la base commune BH, ont aussi la hauteur commune AB ; donc le triangle est la moitié du carré.

On a déjà prouvé que le triangle ABF est égal au triangle HBC ; donc le rectangle BDEF, double du triangle ABF, est équivalent au carré AH, double du triangle

HBC. On démontrera de même que le rectangle CDEG est équivalent au carré AI; mais les deux rectangles BDEF; CDEG, pris ensemble, font le carré BCGF; donc le carré BCGF, fait sur l'hypoténuse, est égal à la somme des carrés ABHL, ACIK, faits sur les deux autres côtés.

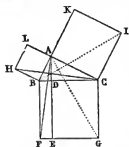
Comme un carré a pour mesure le carré du nombre qui représente son côté, on a l'égalité $\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC}$, qui exprime que le carré du nombre qui représente l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui représentent les deux côtés de l'angle droit.

Corollaire I. Le carré d'un des côtés de l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse, moins le carré de l'autre côté, ce qu'on exprime ainsi : $\overline{AB} = \overline{BC} - \overline{AC}$.



II. Soit ABCD un carré, AC sa diagonale; le triangle ABC étant rectangle et isocèle, on aura $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2 \overline{AB}$; donc le carré fait sur la diagonale AC est double du carré fait sur le côté AB.

Puisque $\overline{AC} : \overline{AB} :: 2 : 1$, on a, en extrayant la racine carrée, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; donc la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté.



III. On a démontré que le carré AH est équivalent au rectangle BDEF; or, à cause de la hauteur commune BF, le carré BCGF est au rectangle BDEF comme la base BC est à la base BD; donc,

$$\overline{BC} : \overline{AB} :: BC : BD.$$

Donc le carré de l'hypoténuse est au carré d'un des côtés de l'angle droit comme l'hypoténuse est au segment adjacent à ce côté. On appelle ici *segment* la partie de l'hypoténuse déterminée par la perpendiculaire abaissée de l'angle droit; ainsi BD est le segment adjacent.

au côté AB, et DC est le segment adjacent au côté AC. On aurait semblablement :

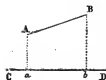
$$\overline{BC} : \overline{AC} :: BC : CD.$$

IV. Les rectangles BDEF, DCGE, ayant aussi la même hauteur, sont entre eux comme leurs bases BD, CD. Or ces rectangles sont équivalents aux carrés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$; donc,

$$\overline{AB} : \overline{AC} :: BD : DC.$$

Donc les carrés des deux côtés de l'angle droit sont entre eux comme les segments de l'hypoténuse adjacents à ces côtés.

DÉFINITION.



On appelle projection d'une droite AB sur une autre CD, la portion *ab* comprise entre les pieds des perpendiculaires abaissées des points A et B sur la droite CD.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Dans tout triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres, moins deux fois le rectangle de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier.



Soit C un angle aigu dans le triangle ABC ; abaissons AD perpendiculaire sur BC, je dis qu'on aura :

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} - 2 BC \cdot CD.$$

Il y a deux cas : 1° Si la perpendiculaire tombe au dedans du triangle ABC, on aura $BD = BC - CD$,

* 9. et par conséquent * $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} - 2 BC \cdot CD$. Ajou-

tant de part et d'autre $\overline{AD}$, et observant que les triangles rectangles ABD, ADC, donnent $\overline{AD} + \overline{BD} = \overline{AB}$ et $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$, on aura $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC} - 2 \overline{BC} \times \overline{CD}$.



2° Si la perpendiculaire AD tombe hors du triangle ABC, on aura $\overline{BD} = \overline{CD} - \overline{BC}$, et par conséquent $\overline{BD} = \overline{CD} + \overline{BC} - 2 \overline{CD} \times \overline{BC}$.

Ajoutant de part et d'autre $\overline{AD}$, on en conclura de même :

$$\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC} - 2 \overline{BC} \times \overline{CD}.$$

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Dans tout triangle obtusangle, le carré du côté opposé à l'angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres plus deux fois le rectangle de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier.



Soit AB le côté opposé à l'angle obtus C du triangle ABC; menons AD perpendiculaire sur BC; je dis qu'on aura :

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} + 2 \overline{BC} \times \overline{CD}.$$

La perpendiculaire ne peut pas tomber au dedans du triangle; car si elle tombait, par exemple, en E, le triangle ACE aurait à la fois l'angle droit E et l'angle obtus C, ce qui est impossible; donc elle tombe au dehors, et on a $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$. De là résulte $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} + 2 \overline{BC} \times \overline{CD}$. Ajoutant de part et d'autre $\overline{AD}$, et faisant les réductions comme dans le théorème précédent, on en conclura $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC} + 2 \overline{BC} \times \overline{CD}$.

Scolie. Le triangle rectangle est le seul dans lequel la

somme des carrés de deux côtés soit égale au carré du troisième : car, si l'angle compris par ces côtés est aigu, la somme de leurs carrés sera plus grande que le carré du côté opposé ; s'il est obtus, elle sera moindre.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Dans un triangle quelconque ABC, si on mène du sommet au milieu de la base la ligne AE, je dis qu'on aura $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AE} + 2\overline{BE}$.



Abaissez la perpendiculaire AD sur la base BC ; le triangle AEC donnera par le théorème XII :

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} - 2EC \times ED.$$

Le triangle ABE donnera par le théorème XIII :

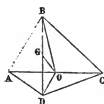
$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} + 2EB \times ED.$$

Donc, en ajoutant et observant que $EB = EC$, on aura :

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AE} + 2\overline{EB}.$$

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.



Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint leurs milieux.

Soient AC, BD, les diagonales du quadrilatère ABCD, O et G leurs milieux ; tirons les lignes BO, DO, OG.

On a, d'après le théorème précédent :

$$\text{Dans le triangle ABC, } \overline{AB} + \overline{BC} = 2\overline{BO} + 2\overline{AO}.$$

$$\text{Dans le triangle ADC, } \overline{AD} + \overline{DC} = 2\overline{DO} + 2\overline{AO}.$$

Ajoutant, on a :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AD} + \overline{DC} = 2(\overline{BO} + \overline{DO}) + 4\overline{AO}.$$

Or, dans le triangle BOD, on a :

$$\overline{BO} + \overline{DO} = 2\overline{BG} + 2\overline{OG}.$$

Donc $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AD} + \overline{DC} = 4\overline{BG} + 4\overline{OG} + 4\overline{AO}$;

et comme $\overline{AC} = 4\overline{AO}$ $\overline{BD} = 4\overline{BG}$,

on a enfin

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AD} + \overline{DC} = 4\overline{OG} + \overline{BD} + \overline{AC}.$$

Corollaire. Si le quadrilatère était un parallélogramme, la droite GO serait nulle; donc, dans tout parallélogramme, la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.

La réciproque de ce dernier théorème est vraie.

Des lignes proportionnelles et de la similitude.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles.



Joignez BE et DC : les deux triangles BDE, DEC, ont même base DE; ils ont aussi même hauteur, puisque les sommets B et C sont situés sur une parallèle à la base; donc ces triangles sont équivalents.

Les triangles ADE, BDE, dont le sommet commun est E, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases AD, DB; ainsi on a,

$$ADE : BDE :: AD : DB.$$

Les triangles ADE, DEC, dont le sommet commun est D, ont aussi même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases AE, EC; donc

$$ADE : DEC :: AE : EC.$$

Mais le triangle $BDE = DEC$; donc, à cause du rapport commun dans ces deux proportions, on en conclura $AD : DB :: AE : EC$.

Corollaire 1^{er}. De là résulte *componendo* :

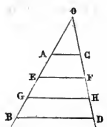
$$AD : AD + DB :: AE : AE + AC,$$

$$\text{ou } AD : AB :: AE : AC;$$

et aussi $AD + DB : DB :: AE + EC : EC,$

$$\text{ou } AB : DB :: AC : EC.$$

II. Les segments des deux droites AB, CD , déterminés par plusieurs parallèles AC, EF, GH, BD , etc., sont proportionnels.



Car, soit O le point de concours des droites AB, CD ; dans le triangle OEF , la ligne AC étant parallèle à la base EF , on aura :

$$OE : OF :: AE : CF.$$

Dans le triangle OGH , on aura semblablement :

$$OE : OF :: GE : FH.$$

Donc, à cause du rapport commun :

$$AE : CF :: GE : FH.$$

On prouverait de même que $GE : FH :: BG : HD$; donc, etc.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Réciproquement, si les côtés AB, AC , sont coupés proportionnellement par la ligne DE , en sorte qu'on ait $AD : DB :: AE : EC$, je dis que la ligne DE sera parallèle à la base BC .



Car, si DE n'est pas parallèle à BC , supposons que DO en soit une; alors, suivant le théorème précédent, on aura $AD : BD :: AO : OC$. Mais, par hypothèse, $AD : BD :: AE : EC$; donc on aurait $AO : OC :: AE : EC$; proportion impossible, puisque, d'une part, l'antécédent AE est plus

grand que AO, et que, de l'autre, le conséquent EC est plus petit que OC; donc la parallèle à BC, menée par le point D, ne peut différer de DE; donc DE est cette parallèle.

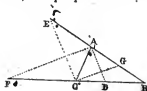
Scolie. La même conclusion aurait lieu si l'on supposait la proportion $AB : AD :: AC : AE$; car cette proportion donnerait $AB - AD : AD :: AC - AE : AE$, ou $BD : AD :: CE : AE$.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

1° La bissectrice AD de l'angle A du triangle ABC divise la base BC en deux segments BD, DC, proportionnels aux deux côtés AB et AC.

2° La bissectrice AF de l'angle extérieur CAE détermine aussi, sur la base prolongée, deux segments BF, CF proportionnels aux mêmes côtés AB, AC.



1° Par le point C menez CE parallèle à AD jusqu'à la rencontre de BA prolongé.

Dans le triangle BCE, la ligne AD est parallèle à la base CE; ainsi on a la proportion :

$$BD : DC :: AB : AE.$$

Mais le triangle ACE est isocèle; car, à cause des parallèles AD, CE, l'angle $ACE = DAG$,* et l'angle $AEC = BAD$; or, par hypothèse, $DAC = BAD$; donc l'angle $ACE = AEC$, et par suite $AE = AC$. Substituant donc AC à la place de AE dans la proportion précédente, on aura :

$$BD : DC :: AB : AC.$$

2° Menez CG parallèle à AF; dans le triangle BAF on a $BF : FC :: AB : AG$. On ferait voir comme précédemment que le triangle AGC est isocèle, et que $AG = AC$.

On a donc $BF : FC :: AB : AC$.

* 16.

Corollaire. Si le point A se meut dans le plan, de manière que le rapport de AB à AC reste constamment égal à $\frac{m}{n}$, les bissectrices des angles BAC, EAC, passeront toujours par les points D et F, puisque les rapports $\frac{BD}{DC}$, $\frac{BF}{CF}$ doivent rester égaux à $\frac{m}{n}$. D'ailleurs les droites AD, AF,

bissectrices des deux angles adjacents, sont perpendiculaires entre elles; donc le point A, dans toutes ses positions, sera sur la circonférence décrite sur FD comme diamètre. Ainsi:

Le lieu géométrique des points, dont les distances à deux points B et C sont dans un rapport donné, est une circonférence de cercle.

DÉFINITION.

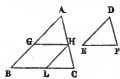
On appelle triangles semblables, deux triangles qui ont les angles égaux, et les côtés homologues proportionnels. (On entend par côtés homologues ceux qui sont opposés aux angles égaux.)

En général nous appellerons polygones semblables ceux qui ont les angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels (en entendant par côtés homologues ceux qui sont adjacents aux angles égaux). *

PROPOSITION XIX.

• THÉORÈME.

Deux triangles équiangles ont les côtés homologues proportionnels.



Soient ABC, DEF, deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, savoir, $A = D$, $B = E$, $C = F$; je dis que les côtés homologues seront proportionnels, de sorte qu'on aura $AB : DE :: AC : DF :: BC : EF$.

Prenez $AG = DE$, $AH = DF$, et joignez GH , les triangles AGH , DEF , seront égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux. Donc l'angle AGH sera égal à l'angle E ; mais on a $E = B$, donc l'angle $B = AGH$; par suite GH est parallèle à BC , et l'on a * la proportion $AB : AG :: AC : AH$. * 16.

Enfin menez HL parallèle à AB , on aura aussi * la proportion $AC : AH :: BC : BL$ ou GH ; car les droites BL , GH , sont égales comme parallèles comprises entre parallèles. * 16.

En comparant la dernière proportion à la précédente, on en déduit, à cause du rapport commun,

$$AB : AG :: AC : AH :: BC : GH,$$

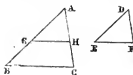
ou $AB : DE :: AC : DF :: BC : EF$.

Corollaire. Pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux chacun à chacun; car alors le troisième sera égal de part et d'autre, et les deux triangles seront équiangles.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Deux triangles qui ont les côtés proportionnels sont équiangles.



Supposons qu'on ait $BC : EF :: AB : DE :: AC : DF$; je dis que les triangles ABC , DEF , auront les angles égaux, savoir, $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Prenez $AG = DE$, $AH = DF$, et joignez GH : on a par hypothèse la proportion $AB : DE :: AC : DF$, ou, ce qui est la même chose, $AB : AG :: AC : AH$; il en résulte que GH est parallèle à BC , et que par suite l'angle $AGH = ABC$. Or, en vertu du théorème précédent, les triangles ABC , AGH , étant équiangles, on a $AB : AG :: AC : AH :: BC : GH$; mais, par hypothèse, on a $AB : DE :: AC : DF :: BC : EF$;

et comme $AG = DE$ et $AH = DF$, on en conclut $GH = EF$; les triangles AGH , DEF , sont donc égaux comme ayant les trois côtés égaux, et par conséquent l'angle $DEF = AGH = ABC$, l'angle $DFE = AHG = ACB$, et l'angle $D = A$.

Scolie I. Il faut remarquer que les angles égaux des deux triangles sont opposés aux côtés proportionnels.

Scolie II. On voit par ces deux dernières propositions que, dans les triangles, l'égalité des angles est une suite de la proportionnalité des côtés, et réciproquement, de sorte qu'une de ces conditions suffit pour assurer la similitude des triangles. Il n'en est pas de même dans les figures de plus de trois côtés; car, dès qu'il s'agit seulement des quadrilatères, on peut, sans changer les angles, altérer la proportion des côtés, ou, sans altérer les côtés, changer les angles; ainsi la proportionnalité des côtés ne peut être une suite de l'égalité des angles, ni *vice versa*.



On voit, par exemple, qu'en menant EF parallèle à AC , les angles du quadrilatère $AEFD$ sont égaux à ceux du quadrilatère $ABCD$; mais la proportion des côtés est différente : de même, sans changer les quatre côtés AB , BC , CD , AD , on peut rapprocher ou éloigner le point B du point D , ce qui altérera les angles.

Scolie III. Les deux propositions précédentes, qui n'en font proprement qu'une, jointes à celle du carré de l'hypoténuse, sont les propositions les plus importantes et les plus fécondes de la géométrie; elles suffisent presque seules à toutes les applications et à la résolution de tous les problèmes : la raison en est que toutes les figures peuvent se partager en triangles, et un triangle quelconque en deux triangles rectangles. Ainsi les propriétés générales des triangles renferment implicitement celles de toutes les figures.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables.



Soit l'angle $A = D$, et supposons qu'on ait $AB : DE :: AC : DF$; je dis que le triangle ABC est semblable à DEF .

Prenez $AG = DE$, et menez GH parallèle à BC : l'angle AGH sera égal à l'angle ABC *; * 25, 1. et le triangle AGH sera équiangle au triangle ABC ; on aura donc $AB : AG :: AC : AH$. Mais, par hypothèse, $AB : DE :: AC : DF$, et par construction $AG = DE$; donc $AH = DF$. Les deux triangles AGH , DEF , ont donc un angle égal compris entre côtés égaux; donc ils sont égaux. Or le triangle AGH est semblable à ABC ; donc DEF est aussi semblable à ABC .

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Deux triangles qui ont les côtés parallèles, ou qui les ont perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables. V. le manuscrit

En effet, soient A, B, C , les angles de l'un des triangles; A', B', C' , les angles de l'autre triangle.

On sait que deux angles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.

On ne peut donc faire qu'une des trois hypothèses suivantes :

$$1^\circ A + A' = 2^\circ \quad B + B' = 2^\circ \quad C + C' = 2^\circ;$$

$$2^\circ A + A' = 2^\circ \quad B + B' = 2^\circ \quad C = C';$$

$$3^\circ A = A' \quad B = B', \text{ et par suite } C = C'.$$

[H3, mais l'angle $\angle AB$ est aussi supplé à $\angle C$ et $\angle C'$.
Donc les deux angles $\angle AB$ et $\angle C'$ sont égaux avant
même supplément $\angle HD$. On démontrera de la même
manière pour les autres angles.]

Or, dans la première hypothèse, la somme des angles des deux triangles serait égale à six droits.

Dans la seconde hypothèse, cette somme serait supérieure à quatre droits.

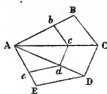
La troisième est donc seule admissible; donc les triangles sont équiangles et semblables.

Remarque. Les côtés homologues des deux triangles sont les côtés parallèles ou perpendiculaires.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Un polygone étant donné, on peut toujours en construire un second tel, que ces deux polygones soient composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.



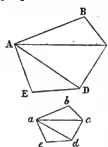
En effet, soit $ABCDE$ le polygone donné; menez du sommet A les diagonales AC , AD ; puis, après avoir pris arbitrairement b sur le côté AB , menez bc parallèle à BC , puis cd parallèle à CD , enfin de parallèle à DE ; les triangles Abc , Acd ,... seront respectivement semblables aux triangles ABC , ACD ,... et les deux polygones $ABCDE$, $Abcde$, qu'on pourra d'ailleurs placer d'une manière quelconque l'un par rapport à l'autre, seront composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement placés.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Deux polygones $ABCDE$, $abcde$, composés (comme on l'a vu précédemment) d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés, ont les an-

gles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels, et par conséquent sont semblables.



Car la similitude des triangles ABC , abc , donne l'angle $ABC = abc$, et l'angle $BCA = bca$; la similitude des triangles ACD , acd , donne l'angle $ACD = acd$, d'où l'on conclut $BCD = bcd$, et ainsi de suite.

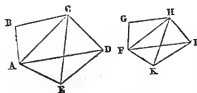
De plus on aura, à cause de la similitude des mêmes triangles, la suite des rapports égaux

$AB : ab :: BC : bc :: AC : ac :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae$;
donc les deux polygones ont aussi leurs côtés homologues proportionnels et sont semblables.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Réciproquement deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés.



Dans le polygone $ABCDE$, menez d'un même angle A les diagonales AC , AD , aux autres angles. Dans l'autre polygone $FGHIK$, menez semblablement de l'angle F homologue à A , les diagonales FH , FI , aux autres angles.

Puisque les polygones sont semblables, l'angle ABC est égal à son homologue FGH , et de plus les côtés AB , BC , sont proportionnels aux côtés FG , GH ; de sorte qu'on a $AB : FG :: BC : GH$. Il suit de là que les triangles ABC , FGH ,

ont un angle égal compris entre côtés proportionnels ; donc
 21. ils sont semblables * ; donc l'angle BCA est égal à GHF. Ces
 angles égaux étant retranchés des angles égaux BCD, GHI,
 les restes ACD, FHI, seront égaux : mais, puisque les trian-
 gles ABC, FGH, sont semblables, on a $AC:FH::BC:GH$;
 d'ailleurs, à cause de la similitude des polygones, $BC:$
 $GH::CD:HI$; donc $AC:FH::CD:HI$: mais on a déjà vu
 que l'angle $ACD = FHI$; donc les triangles ACD, FHI, ont
 un angle égal compris entre côtés proportionnels, donc ils
 sont semblables. On continuerait de même à démontrer la
 similitude des triangles suivants, quel que fût le nombre
 des côtés des polygones proposés ; donc deux polygones
 semblables sont composés d'un même nombre de triangles
 semblables et semblablement disposés.

Remarque. La décomposition peut se faire de plusieurs
 manières, en menant les diagonales par deux sommets ho-
 mologues quelconques. Il résulte de là que dans deux po-
 lygones semblables, deux diagonales homologues CE, HK,
 sont entre elles comme deux côtés homologues ; car elles
 sont les côtés homologues de triangles semblables CDE,
 HIK, qui font partie des deux polygones.

PROPOSITION XXVI.

THÉOREME.

*Les lignes AF, AG, etc., menées comme on vou-
 dra par le sommet d'un triangle, divisent proportion-
 nellement la base BC et sa parallèle DE, de sorte qu'on
 a $DI:BF::IK:FG::KL:GH$, etc.*



Car, puisque DI est parallèle à BF, le
 triangle ADI est équiangle à ABF, et on a la
 proportion $DI:BF::AI:AF$; de même, IK
 étant parallèle à FG, on a $AI:AF::IK:FG$;
 donc, à cause du rapport commun $AI:AF$,
 on aura $DI:BF::IK:FG$. On trouvera sem-

blement $IK:FG::KL:GH$, etc.; donc la ligne DE est divisée aux points I, K, L , comme la base BC l'est aux points F, G, H .

Corollaire. Donc, si BC était divisée en parties égales aux points F, G, H , la parallèle DE serait divisée de même en parties égales aux points I, K, L .

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Si de l'angle droit A d'un triangle rectangle on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse:

1° Les deux triangles partiels ABD, ADC , seront semblables entre eux et au triangle total ABC ;

2° Chaque côté AB ou AC sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse BC et le segment adjacent BD ou DC ;

3° La perpendiculaire AD sera moyenne proportionnelle entre les deux segments BD, DC .



Car, 1° le triangle BAD et le triangle BAC ont l'angle commun B ; de plus, l'angle droit BDA est égal à l'angle droit BAC ; donc le troisième BAD de l'un est égal au troisième C de l'autre; donc ces deux triangles sont équiangles et semblables. On démontrera de même que le triangle DAC est semblable au triangle BAC ; donc les trois triangles sont équiangles et semblables entre eux.

2° Puisque le triangle BAD est semblable au triangle BAC , leurs côtés homologues sont proportionnels. Or, le côté BD dans le petit triangle est homologue à BA dans le grand, parce qu'ils sont opposés à des angles égaux, BAD, BCA ; l'hypoténuse BA du petit est homologue à l'hypoténuse BC du grand; donc on peut former la proportion

$BD:BA :: BA:BC$. On aurait de la même manière $DC:AC :: AC:BC$; donc, 2° chacun des côtés AB , AC , est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et le segment adjacent à ce côté.

3° Enfin, la similitude des triangles ABD , ADC , donne, en comparant les côtés homologues, $BD:AD :: AD:DC$; donc, 3° la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les segments BD , DC , de l'hypoténuse.

Scolie. La proportion $BD:AB :: AB:BC$ donne, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, $\overline{AB} = BD \times BC$. On a de même $\overline{AC} = DC \times BC$, donc $\overline{AB} + \overline{AC} = BD \times BC + DC \times BC$; le second membre est la même chose que $(BD + DC) \times BC$, et il se réduit à $BC \times BC$ ou $\overline{BC}$; donc on a $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$; donc (en se fondant sur la mesure du carré) le carré fait sur l'hypoténuse BC est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés AB , AC . Nous retombons ainsi sur la proposition du carré de l'hypoténuse par une voie très-différente de celle que nous avons suivie; d'où l'on voit qu'à proprement parler la proposition du carré de l'hypoténuse est une suite de la proportionnalité des côtés dans les triangles équiangles.



* 19, 2.

Corollaire. Si d'un point A de la circonférence on mène les deux cordes AB , AC , aux extrémités du diamètre BC , le triangle BAC sera rectangle en A^* ; donc, 1° la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments BD , DC , du diamètre, ou, ce qui revient au même, le carré $\overline{AD}$ est égal au rectangle $BD \times DC$.

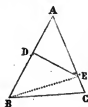
2° La corde AB est moyenne proportionnelle entre le diamètre BC et le segment BD , ou, ce qui revient au même, $\overline{AB} = BD \times BC$. On a semblablement $\overline{AC} = CD \times BC$; donc $\overline{AB}:\overline{AC} :: BD:DC$; et si on compare $\overline{AB}$ à $\overline{BC}$, on aura $\overline{AB}:\overline{BC} :: BD:BC$; on aurait de même $\overline{AC}:\overline{BC} :: DC:BC$. Ces rapports des carrés des côtés, soit entre eux, soit avec le

carré de l'hypoténuse, ont été déjà donnés dans les corol. III et IV de la propos. XI.

PROPOSITION XXVIII.

THÉOREME.

Deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal. Ainsi le triangle ABC est au triangle ADE comme le rectangle $AB \times AC$ est au rectangle $AD \times AE$.



Tirez BE; les deux triangles ABE, ADE, dont le sommet commun est E, ont même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases AB, AD; donc

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

On a de même

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et omettant le commun terme ABE, on aura

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

PROPOSITION XXIX.

THÉOREME.

Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.



Soit l'angle $A = D$, et l'angle $B = E$; d'abord à cause des angles égaux A et D, on aura, d'après le théorème précédent,

$$ABC : DEF :: AB \times AC : DE \times DF,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AB}{DE} \times \frac{AC}{DF},$$

Or, à cause de la similitude des triangles, on a

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE},$$

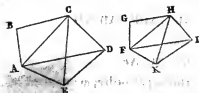
donc

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AB}{DE} \times \frac{AB}{DE} = \frac{AB^2}{DE^2}.$$

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

Les contours ou périmètres des polygones semblables sont comme les côtés homologues, et leurs surfaces sont comme les carrés de ces mêmes côtés.



Car, 1° puisqu'on a, par la nature des figures semblables, $AB : FG :: BC : GH :: CD : HI$, etc., on peut conclure de cette suite de rapports égaux : La somme des antécédents $AB + BC + CD$, etc., périmètre de la première figure, est à la somme des conséquents $FG + GH + HI$, etc., périmètre de la seconde figure, comme un antécédent est à son conséquent, ou comme le côté AB est à son homologue FG .

2° Puisque les triangles ABC, FGH , sont semblables, on a $ABC : FGH :: \overline{AC} : \overline{FH}$; de même les triangles semblables ACD, FHI , donnent $ACD : FHI :: \overline{AC} : \overline{FH}$; donc, à cause du rapport commun $\overline{AC} : \overline{FH}$, on a

$$ABC : FGH :: ACD : FHI.$$

Par un raisonnement semblable on trouverait

$$ACD : FHI :: ADE : FIK;$$

et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre de triangles. De cette suite de rapports égaux on conclura : La

somme des antécédents $ABC + ACD + ADE$, ou le polygone $ABCDE$, est à la somme des conséquents $FGH + FHI + FIK$, ou au polygone $FGHIK$, comme un antécédent ABC est à son conséquent FGH , ou comme $\overline{AB}$ est à $\overline{FG}$; donc les surfaces des polygones semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

Les parties de deux cordes AB, CD , qui se coupent dans un cercle, sont réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire qu'on a $AO : DO :: CO : OB$.



Joignez AC et BD ; dans les triangles ACO, BOD , les angles en O sont égaux comme opposés au sommet; l'angle A est égal à l'angle D , parce qu'ils sont inscrits dans le même segment*; par la même raison, l'angle $C = B$; donc ces triangles sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion $AO : DO :: CO : OB$. * 19, 2

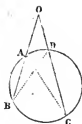
Corollaire. On tire de là $AO \times OB = DO \times CO$: donc le rectangle des deux parties de l'une des cordes est égal au rectangle des deux parties de l'autre.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

Si d'un même point O , pris hors du cercle, on mène les sécantes OB, OC , terminées à l'arc concave BC , les sécantes entières seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, c'est-à-dire qu'on aura $OB : OC :: OD : OA$.

19, 2.



Car, en joignant AC, BD, les triangles OAC, OBD, ont l'angle O commun; de plus l'angle $B = C^*$; donc ces triangles sont semblables; et les côtés homologues donnent la proportion

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Corollaire. Donc le rectangle $OA \times OB$ est égal au rectangle $OC \times OD$.

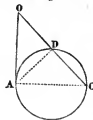
Scolie. On peut remarquer que cette proposition a beaucoup d'analogie avec la précédente, et qu'elle n'en diffère qu'en ce que les deux cordes AB, CD, au lieu de se couper dans le cercle, se coupent au dehors.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÈME.

Si d'un même point O pris hors du cercle on mène une tangente OA et une sécante OC, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure; de sorte qu'on aura $OC : OA :: OA : OD$; ou, ce qui revient au même, $OA^2 = OC \times OD$.

20, 2.



Car, en joignant AD et AC, les triangles OAD, OAC, ont l'angle O commun; de plus l'angle OAD, formé par une tangente et une corde*, a pour mesure la moitié de l'arc AD, et l'angle C a la même mesure; donc l'angle $OAD = C$; donc les deux triangles sont semblables, et on a la proportion

$$OC : OA :: OA : OD,$$

qui donne $OA^2 = OC \times OD$.

Scolie. Cette proposition peut se déduire de la précédente, en considérant la tangente OA comme la limite des positions que prendrait une sécante tournant autour du point O.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÈME.

Dans tout triangle ABC, le rectangle des deux côtés AB, AC, est égal au rectangle compris par le diamètre CE du cercle circonscrit et la perpendiculaire AD abaissée sur le troisième côté BC.

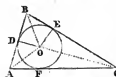


Car, en joignant AE, les triangles ABD, AEC, sont rectangles, l'un en D, l'autre en A; de plus, l'angle B=E; donc ces triangles sont semblables, et ils donnent la proportion $AB : CE :: AD : AC$; d'où résulte $AB \times AC = CE \times AD$.

Corollaire. Si on multiplie ces quantités égales par la même quantité BC, on aura $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$. Or, $AD \times BC$ est le double de la surface du triangle*; donc le produit des trois côtés d'un triangle est égal à sa surface multipliée par le double du diamètre du cercle circonscrit.

Le produit de trois lignes s'appelle quelquefois un *solide*, par une raison qu'on verra ci-après. Sa valeur se conçoit aisément, en imaginant que les lignes sont réduites en nombres, et multipliant les nombres dont il s'agit.

Scolie. On peut démontrer aussi que la surface d'un triangle est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.

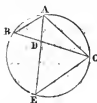


Car les triangles AOB, BOC, AOC, qui ont leur sommet commun en O, ont pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit; donc la somme de ces triangles sera égale à la somme des bases AB, BC, AC, multipliée par la moitié du rayon OD; donc la surface du triangle ABC est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.

PROPOSITION XXXV.

THÉOREME.

Dans un triangle ABC, si on divise l'angle A en deux parties égales par la ligne AD, le rectangle des côtés AB, AC, sera égal au rectangle des segments BD, DC, plus au carré de la sécante AD.



Faites passer une circonférence par les trois points A, B, C; prolongez AD jusqu'à la circonférence, et joignez CE.

Le triangle BAD est semblable au triangle EAC; car, par hypothèse, l'angle $BAD = EAC$; de plus l'angle $B = E$, puisqu'ils ont tous deux pour mesure la moitié de l'arc AC; donc ces triangles sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion $BA : AE :: AD : AC$: de la résulte $BA \times AC = AE \times AD$; mais $AE = AD + DE$, et en multipliant de part et d'autre par AD, on a $AE \times AD = \overline{AD} + AD \times DE$; d'ailleurs $AD \times DE = BD \times DC$; donc enfin

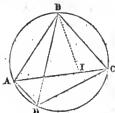
$$BA \times AC = \overline{AD} + BD \times DC.$$

PROPOSITION XXXVI.

THÉOREME.

Dans tout quadrilatère inscrit ABCD, le rectangle des deux diagonales AC, BD, est égal à la somme des rectangles des côtés opposés, de sorte qu'on a

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$



Menez la droite BI, telle que l'angle CBI soit égal à ABD, et prolongez-la jusqu'à sa rencontre avec AC. L'angle $ADB = BCI$, parce qu'ils sont inscrits dans le même segment AOB; de plus l'angle $ABD = CBI$ par construction;

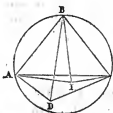
donc le triangle ABD est semblable au triangle IBC, et on a la proportion $AD:CI::BD:BC$; d'où résulte $AD \times BC = CI \times BD$. Je dis maintenant que le triangle ABI est semblable au triangle BDC; car l'angle ABD étant égal à CBI, si on ajoute de part et d'autre DBI, on aura $ABI = DBC$; de plus l'angle BAI = BDC, parce qu'ils sont inscrits dans le même segment; donc les triangles ABI, DBC, sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion $AB:BD::AI:CD$, d'où résulte $AB \times CD = AI \times BD$.

Ajoutant les deux résultats trouvés, et observant que $AI \times BD + CI \times BD = (AI + CI) \times BD = AC \times BD$, on aura $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

PROPOSITION XXXVII.

THÉOREME.

Dans tout quadrilatère non inscriptible, le rectangle des diagonales est moindre que la somme des rectangles des côtés opposés.



Par les trois points A, B, C, faites passer un cercle qui ne contiendra pas le quatrième sommet D, faites l'angle $ABI = DBC$, et l'angle $BAI = BDC$. La droite AI ne pourra pas coïncider avec AC, puisque, le point D n'étant pas sur la circonférence, l'angle BDC est différent de BAC; enfin joignez le point I au point C.

Les triangles ABI, DBC, équiangles par construction, donnent la proportion $AB:AI::BD:DC$; d'où

$$AI \times BD = AB \times DC \dots (1)$$

Les triangles ABD, IBC, sont aussi semblables; car, si des angles égaux ABI, DBC, on retranche la partie commune DBI, il restera l'angle $ABD = IBC$; de plus, à cause de la similitude des triangles ABI, DBC, on a la proportion

$AB:BD::BI:BC$; les triangles ABD , IBC , ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels, et sont semblables; on a donc la proportion $AD:IC::BD:BC$, d'où

$$IC \times BD = AD \times BC \dots (2);$$

ajoutant les égalités (1) et (2), il vient

$$BD \times (AI + IC) = AB \times DC + AD \times BC,$$

et comme $AI + IC$ est plus grand que AC , on a

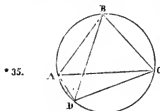
$$BD \times AC < AB \times DC + AD \times BC.$$

Scolie. On conclut de là que si, dans un quadrilatère, le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés, ce quadrilatère est inscriptible.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÈME.

Les diagonales d'un quadrilatère inscrit sont entre elles comme les sommes des rectangles des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.



Le quadrilatère $ABCD$ est décomposé en deux triangles ABC , ADC , par la diagonale AC ; or, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit, on a* :

$$AB \times BC \times AC = 4R \times ABC,$$

$$\text{et } AD \times DC \times AC = 4R \times ADC.$$

Ajoutant, il vient :

$$AC \times (AB \times BC + AD \times DC) = 4R \times ABCD.$$

Mais si l'on décomposait le quadrilatère en triangles par la diagonale BD , on trouverait de même :

$$BD \times (AB \times AD + BC \times DC) = 4R \times ABCD,$$

d'où

$$AC \times (AB \times BC + AD \times DC) = BD \times (AB \times AD + BC \times DC),$$

ce qui donne la proportion

$$AC:BD::AB \times AD + BC \times DC:AB \times BC + AD \times DC.$$

Problèmes relatifs au livre III.

PROBLÈME PREMIER.

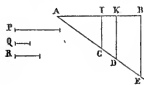
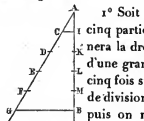
Diviser une ligne droite donnée en tant de parties égales qu'on voudra, ou en parties proportionnelles à des lignes données.

1° Soit proposé de diviser la ligne AB en cinq parties égales; par l'extrémité A on mènera la droite indéfinie AG, et prenant AC d'une grandeur quelconque, on portera AC cinq fois sur AG. On joindra le dernier point de division G et l'extrémité B par la ligne GB, puis on mènera CI parallèle à GB; je dis que AI sera la cinquième partie de la ligne AB, et qu'ainsi en portant AI cinq fois sur AB, la ligne AB sera divisée en cinq parties égales.

Car, puisque CI est parallèle à GB, les côtés AG, AB, sont coupés proportionnellement en C et I *. Mais AC est la cinquième partie de AG; donc AI est la cinquième partie de AB. • 16.

2° Soit proposé de diviser la ligne AB en parties proportionnelles aux lignes données P, Q, R. Par l'extrémité A on tirera l'indéfinie AG, on prendra $AC = P$, $CD = Q$, $DE = R$, on joindra les extrémités E et B, et par les points C, D, on mènera CI, DK, parallèles à EB; je dis que la ligne AB sera divisée en parties AI, IK, KB, proportionnelles aux lignes données P, Q, R.

Car, à cause des parallèles CI, DK, EB, les parties AI, IK, KB, sont proportionnelles aux parties AC, CD, DE *; et par construction celles-ci sont égales aux lignes données P, Q, R. • 16.



PROBLÈME II.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données A, B, C.



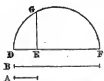
Tirez les deux lignes indéfinies DE, DF, sous un angle quelconque. Sur DE prenez $DA = A$ et $DB = B$, sur DF prenez $DC = C$, joignez AC, et par le point B menez BX parallèle à AC; je dis

que DX sera la quatrième proportionnelle demandée : car, puisque BX est parallèle à AC, on a la proportion $DA : DB :: DC : DX$; or, les trois premiers termes de cette proportion sont égaux aux trois lignes données; donc DX est la quatrième proportionnelle demandée.

Corollaire. On trouvera de même une troisième proportionnelle aux deux lignes données A, B, car elle sera la même que la quatrième proportionnelle aux trois lignes A, B, B.

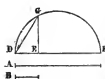
PROBLÈME III.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données A et B.

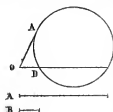


Sur la ligne indéfinie DF prenez $DE = A$, et $EF = B$; sur la ligne totale DF comme diamètre, décrivez la demi-circonférence DGF; au point E élevez sur le diamètre la perpendiculaire EG, qui rencontre la circonférence en G; je dis que EG sera la moyenne proportionnelle cherchée.

Car la perpendiculaire GE, abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre DE, EF* : or, ces segments sont égaux aux lignes données A et B.



GD sera moyenne proportionnelle entre A et B.



Troisième construction. Prenez $OC = A$, $OD = B$; par les points D et C faites passer une circonférence quelconque, et par le point O menez une tangente OA à cette circonférence; la ligne OA sera moyenne proportionnelle entre A et B.

PROBLÈME IV.

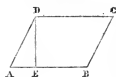
Par un point donné A dans l'angle donné BCD, tirer la ligne BD de manière que les parties AB, AD, comprises entre le point A et les deux côtés de l'angle, soient égales.



Par le point A menez AE parallèle à CD, prenez $BE = CE$, et par les points B et A tirez BAD, qui sera la ligne demandée. Car, AE étant parallèle à CD, on a $BE : EC :: BA : AD$; or $BE = EC$; donc $BA = AD$.

PROBLÈME V.

Faire un carré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné.



ou

1° Soient AB la base du parallélogramme donné, DE sa hauteur, et X le côté du carré cherché; on doit avoir :

$$X^2 = AB \times DE$$

$$AB : X :: X : DE.$$



Le côté X est donc une moyenne proportionnelle entre AB et DE.

2° On verrait de la même manière que le côté du carré équivalent à un triangle donné, est une moyenne proportionnelle entre la base du triangle et la moitié de la hauteur.

PROBLÈME VI.

Faire sur la ligne AD un rectangle ADEX équivalent au rectangle donné ABFC.



Soit AX la hauteur inconnue du rectangle ADEX; puisque les deux rectangles doivent être équivalents, on a l'égalité $AD \times AX = AB \times AC$, ce qui donne la proportion $AD : AB :: AC : AX$.

La ligne cherchée AX est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes AD, AB, AC.

PROBLÈME VII.

Trouver deux droites qui soient dans le même rapport que les surfaces de deux rectangles donnés.

Soient A, B, les dimensions du premier rectangle; C, D, les dimensions du second.

L'une des deux lignes cherchées peut être choisie arbitrairement; nous la prendrons égale à A, et soit X la seconde ligne. On doit avoir d'après l'énoncé :

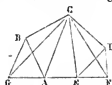
$$A \times B : C \times D :: A : X,$$

d'où
$$X = \frac{C \times D \times A}{A \times B} = \frac{C \times D}{B}.$$

La ligne cherchée X sera donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes B, C, D.

PROBLÈME VIII.

Faire un triangle équivalent à un polygone donné.



Soit $ABCDE$ le polygone donné. Tirez d'abord la diagonale CE , qui retranche le triangle CDE ; par le point D , menez DF parallèle à CE jusqu'à la rencontre de AE prolongé; joignez CF , et le polygone $ABCDE$ sera équivalent au polygone $ABCF$ qui a un côté de moins.

Car les triangles CDE , CFE , ont la base commune CE ; ils ont aussi la même hauteur, puisque leurs sommets D , F , sont situés sur une ligne DF parallèle à la base; donc ces triangles sont équivalents. Ajoutant de part et d'autre la figure $ABCE$, on aura, d'un côté, le polygone $ABCDE$, et, de l'autre, le polygone $ABCF$, qui seront équivalents.

On peut pareillement retrancher l'angle B en substituant au triangle ABC le triangle équivalent AGC , et ainsi le pentagone $ABDE$ sera changé en un triangle équivalent GCF .

Le même procédé s'appliquera à toute autre figure; car, en diminuant d'un à chaque fois le nombre des côtés, on finira par tomber sur le triangle équivalent.

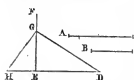
Scolie. On a déjà vu que tout triangle peut être changé en un carré équivalent*, ainsi on trouvera toujours un carré équivalent à une figure rectiligne donnée; c'est ce qu'on appelle *carrer* la figure rectiligne, ou en trouver la *quadrature*.

Le problème de la *quadrature du cercle* consiste à trouver un carré équivalent à un cercle dont le diamètre est donné.

PROBLÈME IX.

Faire un carré qui soit égal à la somme ou à la différence de deux carrés donnés.

Soient A et B les côtés des carrés donnés :



1° S'il faut trouver un carré égal à la somme de ces carrés ; tirez les deux lignes indéfinies ED, EF, à angle droit ; prenez $ED = A$ et $EG = B$, joignez DG, et DG sera le côté du carré cherché.

Car le triangle DEG étant rectangle, le carré fait sur DG est égal à la somme des carrés faits sur ED et EG.

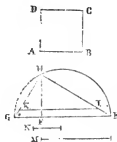
2° S'il faut trouver un carré égal à la différence des carrés donnés, formez de même l'angle droit FEH, prenez GE égal au plus petit des côtés A et B ; du point G, comme centre, et d'un rayon GH égal à l'autre côté, décrivez un arc qui coupe EH en H ; je dis que le carré fait sur EH sera égal à la différence des carrés faits sur les lignes A et B.

Car le triangle GEH est rectangle, l'hypoténuse $GH = A$, et le côté $GE = B$; donc le carré fait sur EH, etc.

Scolie. On peut trouver ainsi un carré égal à la somme de tant de carrés qu'on voudra ; car la construction qui en réduit deux à un seul, en réduira trois à deux, et ces deux-ci à un, ainsi des autres. Il en serait de même si quelques-uns des carrés devaient être soustraits de la somme des autres.

PROBLÈME X.

Construire un carré qui soit au carré donné ABCD, comme la ligne M est à la ligne N.



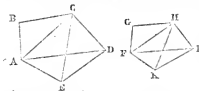
Sur la ligne indéfinie EG, prenez $EF = M$, et $FG = N$; sur EG, comme diamètre, décrivez une demi-circconférence, et au point F élevez sur le diamètre la perpendiculaire FH. Du point H menez les cordes HG, HE :

sur la première prenez HK égale au côté AB du carré donné, et par le point K menez KI parallèle à EG; je dis que HI sera le côté du carré cherché.

Car, à cause des parallèles KI, GE, on a $HI:HK::HE:HG$; donc $\overline{HI}:\overline{HK}::\overline{HE}:\overline{HG}$; mais, dans le triangle rectangle EHG *, le carré de HE est au carré de HG comme le segment EF est au segment FG, ou comme M est à N; donc $\overline{HI}:\overline{HK}::M:N$. Mais $HK=AB$; donc le carré fait sur HI est au carré fait sur AB comme M est à N.

PROBLÈME XI.

Sur le côté FG, homologue à AB, décrire un polygone semblable au polygone donné ABCDE.



Dans le polygone donné tirez les diagonales AC, AD: au point F faites l'angle GFH = BAC, et au point G l'angle FGH = ABC; les lignes FH, GH, se couperont en H, et FGH sera un triangle semblable à ABC: de même sur FH, homologue à AC, construisez le triangle FHI semblable à ADC, et sur FI, homologue à AD, construisez le triangle FIK, semblable à ADE. Le polygone FGHKI sera le polygone demandé, semblable à ABCDE.

Car ces deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.

PROBLÈME XII.

Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable qui soit égale à leur somme ou à leur différence.

Soient P et Q les surfaces des polygones donnés; A et B deux côtés homologues de ces polygones; soit X la surface du polygone cherché, x le côté homologue à A et B.

Les polygones semblables étant comme les carrés des côtés homologues, on aura :

$$P : Q :: A^2 : B^2,$$

d'où $P : P + Q :: A^2 : A^2 + B^2.$

On aura aussi $P : X :: A^2 : x^2;$

et comme $X = P + Q$, les deux dernières proportions ont les trois premiers termes communs; donc $x^2 = A^2 + B^2$.

Ainsi le côté x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont A et B.

Connaissant le côté x , la question est ramenée au problème précédent.

Si le polygone X devait être égal à $P - Q$, on aurait encore les proportions :

$$P : Q :: A^2 : B^2,$$

d'où $P : P - Q :: A^2 : A^2 - B^2.$

On a d'ailleurs $P : X :: A^2 : x^2,$

d'où l'on conclut $x^2 = A^2 - B^2.$

PROBLÈME XIII.

Construire une figure semblable à une figure donnée, et qui soit à cette figure dans le rapport de m à n.

Soit P la surface de la figure donnée, A l'un de ses côtés; soit encore X la surface de la figure cherchée, x le côté homologue de A.

On aura, d'après l'énoncé du problème :

$$X : P :: m : n.$$

Et à cause de la similitude des polygones :

$$X : P :: x^2 : A^2,$$

d'où $x^2 : A^2 :: m : n.$

On trouvera donc le côté x par le problème X.

PROBLÈME XIV.

Construire une figure semblable à la figure P et équivalente à la figure Q.

Soient A un côté du polygone P, et x le côté homologue de la figure cherchée X.

On aura, à cause de la similitude des polygones :

$$P : X :: A^2 : x^2.$$

Et comme X doit être équivalent à Q,

$$P : Q :: A^2 : x^2.$$

Si l'on cherche deux carrés M^2 , N^2 , équivalents à P et à Q, on aura

$$M^2 : N^2 :: A^2 : x^2,$$

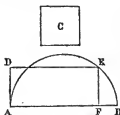
d'où

$$M : N :: A : x.$$

La ligne x sera donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes M, N, A.

PROBLÈME XV.

Construire un rectangle équivalent à un carré donné C, et dont les côtés adjacents fassent une somme donnée AB.



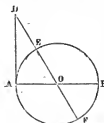
que AF et FB seront les côtés du rectangle cherché.

Car leur somme est égale à AB; et leur rectangle $AF \times FB$ est égal au carré de EF, ou au carré de AD; donc ce rectangle est équivalent au carré donné C.

Scolie. Il faut, pour que le problème soit possible, que la distance AD n'excède pas le rayon, c'est-à-dire que le côté du carré C n'excède pas la moitié de la ligne AB.

PROBLÈME XVI.

Construire un rectangle équivalent à un carré C, et dont les côtés adjacents aient entre eux la différence donnée AB.



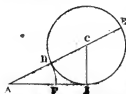
Sur la ligne donnée AB, comme diamètre, décrivez une circonférence; à l'extrémité du diamètre, menez la tangente AD égale au côté du carré C: par le point D et le centre O tirez la sécante DE: je dis que DE et DF seront les côtés adjacents du rectangle demandé.

Car, 1° la différence de ces côtés est égale au diamètre EF ou AB; 2° le rectangle $DE \times DF$ est égal à AD^2 ; donc ce rectangle sera équivalent au carré donné C.

PROBLÈME XVII.

Diviser une ligne en moyenne et extrême raison.

Diviser une ligne AB en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire en deux parties telles que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.



À l'extrémité B de la ligne AB élevez la perpendiculaire BC égale à la moitié de AB; du point C, comme centre, et du rayon CB décrivez une circonférence, tirez AC qui coupera la circonférence en D, et prenez $AF = AD$: je dis que la ligne AB sera divisée au point F de la manière demandée.

En effet, prolongez AC jusqu'à ce qu'elle rencontre de

nouveau la circonférence en E; la ligne AB étant tangente, on a la proportion

$$AE : AB :: AB : AD,$$

ou $AE - AB : AB :: AB - AD : AD.$

Or $AB = DE$, on a donc $AE - AB = AD = AF$; on a aussi $AB - AD = AB - AF = FB.$

Donc, enfin, on a la proportion

$$AF : AB :: AB : FB.$$

Scolie. Soit $AB = a$, on a $AF = AD = AC - CD.$

$$\text{Or } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$CD = \frac{a}{2},$$

$$\text{donc } AF = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \times (\sqrt{5} - 1).$$



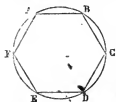
LIVRE IV.

LES POLYGONES RÉGULIERS ET LA MESURE DU CERCLE.

DÉFINITION.

Un polygone qui est à la fois équiangle et équilatéral, s'appelle *polygone régulier*.

Il y a des polygones réguliers de tout nombre de côtés.



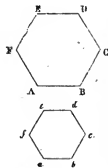
Car, si l'on conçoit une circonférence divisée en m parties égales, et qu'on joigne par des droites les points de division consécutifs A, B, C..., on formera un polygone de m côtés qui seront tous égaux, comme sous-tendant des arcs égaux; de plus, les angles A, B, C, seront égaux comme angles inscrits qui sous-tendent des portions égales de la circonférence.

Le triangle équilatéral est le polygone régulier de trois côtés, le carré celui de quatre, et ainsi de suite.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont deux figures semblables.



Soient, par exemple, les deux hexagones réguliers ABCDEF, *abcdef* : la somme des angles est la même, dans l'une et dans l'autre figure; elle est égale à huit angles droits. L'angle A est la sixième partie de cette somme, aussi bien que l'angle *a*; donc les deux angles A

et a sont égaux; il en est par conséquent de même des angles B et b , des angles C et c , etc.

De plus, puisque par la nature de ces polygones les côtés AB, BC, CD, etc., sont égaux, ainsi que ab , bc , cd , etc., il est clair qu'on a les proportions $AB:ab::BC:bc::CD:cd$, etc.; donc les deux figures dont il s'agit ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels; donc elles sont semblables.

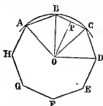
Corollaire. Les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme les côtés homologues, et leurs surfaces sont comme les carrés de ces mêmes côtés.

Scolie. L'angle d'un polygone régulier se détermine par le nombre de ses côtés, comme celui d'un polygone équiangle.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Tout polygone régulier peut être inscrit dans le cercle, et peut lui être circonscrit.



Soit ABCDE, etc., le polygone dont il s'agit; imaginez qu'on fasse passer une circonférence par les trois points A, B, C; soit O son centre, et OP la perpendiculaire abaissée sur le milieu du côté BC; joignez AO et OD.

Le quadrilatère OPCD et le quadrilatère OPBA peuvent être superposés : en effet le côté OP est commun, l'angle $OPC = OPB$, puisqu'ils sont droits; donc le côté PC s'appliquera sur son égal PB, et le point C tombera en B. De plus, par la nature du polygone, l'angle $PCD = PBA$, donc CD prendra la direction BA; et puisque $CD = BA$, le point D tombera en A, et les deux quadrilatères coïncideront entièrement l'un avec l'autre. La distance OD est

donc égale à AO , et par conséquent la circonférence qui passe par les trois points A, B, C , passera aussi par le point D : mais, par un raisonnement semblable, on prouvera que la circonférence qui passe par les trois sommets B, C, D , passera par le sommet suivant E , et ainsi de suite; donc la même circonférence qui passe par les points A, B, C , passe par tous les sommets des angles du polygone, et le polygone est inscrit dans cette circonférence.

En second lieu, par rapport à cette circonférence, tous les côtés AB, BC, CD , etc., sont des cordes égales; elles
 * 8, 2. sont donc également éloignées du centre*; donc, si du point O , comme centre, et du rayon OP , on décrit une circonférence, cette circonférence touchera le côté BC et tous les autres côtés du polygone, chacun dans son milieu, et la circonférence sera inscrite dans le polygone, ou le polygone circonscrit à la circonférence.

Scolie I. Le point O , centre commun du cercle inscrit et du cercle circonscrit, peut être regardé aussi comme le centre du polygone; et par cette raison on appelle *angle au centre*, l'angle AOB formé par les deux rayons menés aux extrémités d'un même côté AB .

Puisque toutes les cordes AB, BC , etc., sont égales, il est clair que tous les angles au centre sont égaux, et qu'ainsi la valeur de chacun se trouve en divisant quatre angles droits par le nombre des côtés du polygone.

Scolie II. Pour inscrire un polygone régulier d'un certain nombre de côtés dans une circonférence donnée, il ne s'agit que de diviser la circonférence en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés.

Scolie III. Si dans un arc on inscrit une suite de cordes égales, la figure ainsi formée est appelée portion de polygone régulier, ou mieux ligne brisée régulière. Cette portion a les propriétés principales des polygones réguliers : elle a les angles égaux, elle est à la fois inscriptible et circonscriptible au cercle ; cependant elle ne ferait partie d'un

polygone régulier proprement dit, qu'autant que l'arc sous-tendu par un de ses côtés serait une partie aliquote de la circonférence.

PROPOSITION III.

PROBLÈME.

Inscrire un carré dans une circonférence donnée.



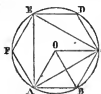
Tirez deux diamètres AC, BD, qui se coupent à angles droits ; joignez les extrémités A, B, C, D, et la figure ABCD sera le carré inscrit : car, les angles AOB, BOC, etc., étant égaux, les cordes AB, BC, etc., sont égales.

Scolie. Le triangle BOC étant rectangle et isocèle, on a $BC : BO :: \sqrt{2} : 1$; donc le côté du carré inscrit est au rayon comme la racine carrée de 2 est à l'unité.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME.

Inscrire un hexagone régulier et un triangle équilatéral dans une circonférence donnée.



Supposons le problème résolu, et soit AB un côté de l'hexagone inscrit ; si on mène les rayons AO, OB, je dis que le triangle AOB sera équilatéral.

Car l'angle AOB est la sixième partie de quatre angles droits ; ainsi, en prenant l'angle droit pour unité, on aura $AOB = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: les deux autres angles ABO, BAO, du même triangle valent ensemble $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, et comme ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{2}{3}$; donc le triangle ABO est équilatéral ; donc le côté de l'hexagone inscrit est égal au rayon.

Il suit de là que, pour inscrire un hexagone régulier dans

une circonférence donnée, il faut porter le rayon six fois sur la circonférence, ce qui ramènera au même point d'où on était parti.

L'hexagone ABCDEF étant inscrit, si l'on joint les sommets des angles alternativement, on formera le triangle équilatéral ACE.

Scolie. La figure ABCO est un parallélogramme, et même
 15,3. un losange, puisque $AB = BC = CO = AO$; donc la somme des carrés des diagonales $\overline{AC} + \overline{BO}$, est égale à la somme des carrés des côtés, laquelle est $4 \overline{AB}$ ou $4 \overline{BO}$; retranchant de part et d'autre $\overline{BO}$, il restera $\overline{AC} = 3 \overline{BO}$; donc $\overline{AC} : \overline{BO} :: 3 : 1$, ou $AC : BO :: \sqrt{3} : 1$; donc le côté du triangle équilatéral est au rayon comme la racine carrée de 3 est à l'unité.

PROPOSITION V.

PROBLÈME.

Inscrire un décagone régulier dans un cercle.

Supposons le problème résolu, et soit

 AB un côté du décagone inscrit; l'angle au centre AOB est égal à $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$; la somme des angles OBA, OAB est donc égale à $2^{\frac{4}{5}}$ — $\frac{2}{5}$ ou $\frac{8}{5}$, et par conséquent chacun d'eux vaut $\frac{4}{5}$.

Menons la bissectrice BM de l'angle OBA; le triangle MOB est isocèle, puisque les angles MOB, OBM, valent chacun $\frac{2}{5}$; et l'on a $OM = MB$. Le triangle BAM est aussi isocèle; car l'angle MBA étant égal à $\frac{2}{5}$, et l'angle BAM à $\frac{4}{5}$, le troisième angle AMB vaut nécessairement $\frac{4}{5}$.

Ainsi,

$$AB = BM = MO.$$

18,3. Enfin on a

$$BO : BA :: MO : AM,$$

ou bien

$$AO : OM :: OM : AM.$$

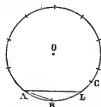
car la bissectrice divise la base du triangle en deux segments proportionaux aux deux côtés

On voit donc que le rayon AO est divisé au point M en moyenne et extrême raison, et que le plus grand segment OM est égal au côté du décagone inscrit.

Remarque. Le côté du décagone inscrit dans un cercle dont le rayon est R, est égal à

$$\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Corollaire I. Si on joint de deux en deux les sommets du décagone régulier, on formera le pentagone régulier ACEGI.



Corollaire II. AB étant toujours le côté du décagone, soit AL le côté de l'hexagone; alors l'arc BL sera, par rapport à la circonférence, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{15}$; donc la corde BL sera le côté du pentédécagone ou polygone régulier de 15 côtés. On voit en même temps que l'arc CL

est le tiers de CB.

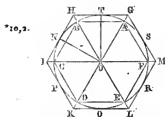
Scolie. Un polygone régulier étant inscrit, si on divise les arcs sous-tendus par ses côtés en deux parties égales, et qu'on tire les cordes des demi-arcs, celles-ci formeront un nouveau polygone régulier d'un nombre de côtés double : ainsi on voit que le carré peut servir à inscrire successivement les polygones réguliers de 8, 16, 32, etc., côtés. De même l'hexagone servira à inscrire les polygones réguliers de 12, 24, 48, etc., côtés; le décagone, les polygones de 20, 40, 80, etc., côtés; le pentédécagone, des polygones de 30, 60, 120, etc., côtés (1).

(1) On a cru longtemps que ces polygones étaient les seuls qui pussent être inscrits par les procédés de la géométrie élémentaire, ou, ce qui revient au même, par la résolution des équations du premier et du second degré : mais M. Gauss a prouvé, dans un ouvrage intitulé *Disquisitiones Arithmeticae*, Lipsiae, 1801, qu'on peut inscrire par de semblables moyens le polygone régulier de dix-sept côtés, et en général celui de $2^n + 1$ côtés, pourvu que $2^n + 1$ soit un nombre premier.

PROPOSITION VI.

PROBLÈME.

Étant donné le polygone régulier inscrit ABCD, etc., circoncrire à la même circonférence un polygone semblable.



Au point T, milieu de l'arc AB, menez la tangente GH, qui sera parallèle à AB* ; faites la même chose au milieu de chacun des autres arcs BC, CD, etc., ces tangentes formeront, par leurs intersections, le polygone régulier circonscrit GHIK, etc., semblable au polygone inscrit.

Il est aisé de voir d'abord que les trois points O, B, H, sont en ligne droite, car les triangles rectangles OTH, OHN, ont l'hypoténuse commune OH, et le côté OT = ON ;
 19, 1. donc ils sont égaux ; donc l'angle TOH = HON, et par conséquent la ligne OH passe par le point B, milieu de l'arc TN : par la même raison, le point I est sur le prolongement de OC, etc. Mais, puisque GH est parallèle à AB, et HI à BC, l'angle GHI = ABC ; de même HIK = BCD, etc. ; donc les angles du polygone circonscrit sont égaux à ceux du polygone inscrit. De plus, à cause de ces mêmes parallèles, on a GH : AB :: OH : OB, et HI : BC :: OH : OB ; donc GH : AB :: HI : BC. Mais AB = BC, donc GH = HI. Par la même raison, HI = IK, etc. ; donc les côtés du polygone circonscrit sont égaux entre eux ; donc ce polygone est régulier et semblable au polygone inscrit.

*27, 1

Corollaire I. Réciproquement, si on donnait le polygone circonscrit GHIK, etc., et qu'il fallût tracer par son moyen le polygone inscrit ABC, etc., on voit qu'il suffirait de mener aux sommets G, H, I, etc., du polygone donné les lignes OG, OH, etc., qui rencontreraient la circonfé-

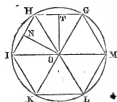
rence aux points A, B, C, etc.; on joindrait ensuite ces points par les cordes AB, BC, etc., qui formeraient le polygone inscrit. On pourrait aussi, dans le même cas, joindre tout simplement les points de contact, T, N, P, etc., par les cordes TN, NP, etc., ce qui formerait également un polygone inscrit semblable au circonscrit.

Corollaire II. Donc on peut circonscrire à un cercle donné tous les polygones réguliers qu'on sait inscrire dans ce cercle, et réciproquement.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

L'aire d'un polygone régulier est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.



Soit, par exemple, le polygone régulier GHKLMI, etc., le triangle GOH a pour mesure $GH \times \frac{1}{2} OT$, le triangle OHI a pour mesure $HI \times \frac{1}{2} ON$: mais $ON = OT$; donc les deux triangles réunis ont pour mesure $(GH + HI) \times \frac{1}{2} OT$. En continuant ainsi pour les autres triangles, on verra que la somme de tous les triangles, ou le polygone entier, a pour mesure la somme des bases GH, HI, IK, etc., ou le périmètre du polygone, multiplié par $\frac{1}{2} OT$, moitié du rayon du cercle inscrit.

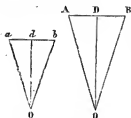
Scolie. Le rayon du cercle inscrit OT n'est autre chose que la perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés; on l'appelle quelquefois l'*apothème* du polygone.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Les périmètres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont comme les rayons des cercles

circonscrits, et aussi comme les rayons des cercles inscrits; leurs surfaces sont comme les carrés de ces mêmes rayons.



Soit AB un côté de l'un des polygones dont il s'agit, O son centre, et par conséquent OA le rayon du cercle circonscrit, et OD, perpendiculaire sur AB, le rayon du cercle inscrit; soit pareillement *ab* le côté d'un autre polygone semblable, *o* son centre, *oa* et *od* les

rayons des cercles circonscrit et inscrit. Les périmètres des deux polygones sont entre eux comme les côtés AB et *ab*; 30.3 mais les angles A et *a* sont égaux, comme étant chacun moitié de l'angle du polygone; il en est de même des angles B et *b*; donc les triangles ABO, *abo*, sont semblables, ainsi que les triangles rectangles ADO, *ado*; donc $AB : ab :: AO : ao :: DO : do$; donc les périmètres des polygones sont entre eux comme les rayons AO, *ao*, des cercles circonscrits, et aussi comme les rayons DO, *do*, des cercles inscrits.

Les surfaces de ces mêmes polygones sont entre elles comme les carrés des côtés homologues AB, *ab*; elles sont par conséquent aussi comme les carrés des rayons des cercles circonscrits AO, *ao*, ou comme les carrés des rayons des cercles inscrits OD, *od*.

DÉFINITIONS.

I. On appelle quantité *variable* une quantité qui prend successivement différents états de grandeur.

II. On appelle *limite* une grandeur fixe dont une quantité variable peut approcher d'autant près qu'on veut sans pouvoir l'atteindre.

III. L'arithmétique et la géométrie présentent de nombreux exemples de quantités variables, et de limites vers lesquelles tendent ces variables.

On sait, par exemple, que l'angle d'un polygone régulier de m côtés a pour valeur

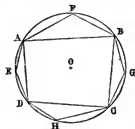
$$\frac{2m-4}{m} = 2 - \frac{4}{m}.$$

Or, si l'on suppose que le nombre des côtés croisse jusqu'à l'infini, on voit que la valeur de l'angle augmentera; et comme on peut prendre m assez grand pour que la fraction $\frac{4}{m}$ soit plus petite que toute quantité donnée, on en conclut que les valeurs successives de l'angle du polygone régulier auront pour limite deux droits.

De même, si l'on prend le milieu c d'une droite AB , puis le milieu c' de cB , et ainsi de suite, les lignes $Ac, Ac', Ac'' \dots$ auront pour limite AB .

Et l'on pourrait multiplier les exemples à l'infini.

IV. Il est évident que si les facteurs a, b, c , d'un produit ont pour limites A, B, C , le produit $a \times b \times c$ aura pour limite $A \times B \times C$.



V. Soit $ABCD$ un polygone inscrit dans une circonférence; le périmètre de ce polygone est moindre que la longueur de la circonférence, car chaque côté est plus petit que l'arc correspondant. Prenons sur les arcs $AB, BC, CD, \dots$ des points de division F, G, H, E , et tirons les cordes $AF, FB, BG, \dots$ nous aurons inscrit un second polygone d'un périmètre plus grand que le premier; si nous prenons de nouveaux points de division intermédiaires, nous aurons un troisième polygone d'un périmètre encore plus grand; et ainsi de suite.

Les périmètres de ces polygones successifs vont donc en s'approchant de la longueur de la circonférence, et nous admettrons comme une proposition évidente que,

si le nombre des côtés du polygone était suffisamment grand, la différence entre la longueur de la circonférence et le périmètre du polygone serait moindre que toute quantité donnée; ou, en d'autres termes, que

La longueur de la circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit, dont le nombre des côtés croît indéfiniment.

On remarque aussi que les surfaces des polygones successifs qui sont toutes moindres que la surface du cercle, en diffèrent de moins en moins; et, si l'on admet que la différence puisse devenir moindre que toute grandeur donnée, on en conclut que

L'aire du cercle est la limite de l'aire d'un polygone inscrit, dont le nombre des côtés croît indéfiniment.

VI. Il résulte évidemment de ce qui vient d'être dit que toute propriété qui aura lieu pour le périmètre ou la surface d'un polygone inscrit, quel que soit le nombre de ses côtés, s'appliquera à la longueur ou à la surface du cercle.



Ainsi, par exemple, le périmètre de tout polygone inscrit dans un cercle étant moindre que le périmètre d'un polygone enveloppant la circonférence, on en conclut que la longueur de la circonférence est elle-même plus petite que le périmètre de tout polygone enveloppant.



Lorsqu'on inscrit dans un cercle des polygones réguliers dont le nombre des côtés va en croissant, les apothèmes augmentent, puisque les côtés des polygones deviennent plus petits, et sont plus éloignés du centre.

En outre, ces apothèmes ont pour limite le rayon du cercle

En effet, soit AB le côté d'un polygone régulier inscrit, OC l'apothème, et OB le rayon. On a, dans le triangle OBC, $OB - OC < OB$.

Or CB, moitié de AB, peut devenir aussi petit qu'on voudra; donc, à *fortiori*, $OB - OC$ peut devenir moindre que toute quantité donnée.

PROPOSITION IX.

THÉOREME.

1° Les circonférences sont entre elles comme leurs rayons.

2° Les surfaces des cercles sont comme les carrés des rayons.



1° Inscrivons dans les circonférences dont les rayons sont OB et CA, deux polygones réguliers semblables.



Soient P et p les périmètres de ces polygones; désignons par R et r les rayons OB et CA, et par C et c leurs circonférences, on aura *

* pr. 8.

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

Or, cette proportion ayant lieu, quel que soit le nombre des côtés des polygones, s'appliquera également aux longueurs des circonférences, et l'on aura

$$(1) \quad \frac{C}{c} = \frac{R}{r}.$$

2° Soient C', c', les surfaces des mêmes cercles; S et s, les surfaces de deux polygones réguliers semblables inscrits, on aura *

* 8.

$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2};$$

et comme cette proportion est vraie, quel que soit le nombre des côtés des polygones,

$$\frac{C'}{c'} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Scolie. De l'égalité (1) on déduit aussi :

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}.$$

Donc le rapport d'une circonférence à son diamètre est le même pour toutes les circonférences. Ce rapport, qu'on désigne ordinairement par π , est incommensurable, et ne peut être calculé qu'approximativement. Sa valeur en décimales est

$$\pi = 3,1415926535897932, \text{ etc. } \dots$$

Nous donnerons bientôt une méthode élémentaire pour calculer approximativement la valeur de π .

La connaissance du nombre π permet d'évaluer la longueur d'une circonférence dont le rayon est connu ; car de l'égalité

$$\frac{C}{2R} = \pi, \text{ on déduit } C = 2\pi R.$$

Exemple. $R = 18^m,35$; en prenant pour π la valeur approchée 3,14, on a

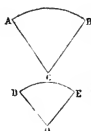
$$C = 2 \times 3,14 \times 18,35 = 115^m,2380.$$

DÉFINITIONS.

On appelle arcs semblables, secteurs semblables, segments semblables, ceux qui répondent à des angles au centre égaux.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.



1° Les arcs semblables AB, DE, sont entre eux comme les rayons AC, OD.

2° Les secteurs semblables BCA, DOE, sont entre eux comme les carrés de ces rayons.

1° On a*, arc BA : circ. AC :: C : 4^{droite}.

De même, arc DE : circ. OD :: O : 4^{dr}.

*pr 18,
h v. 2.

Et à cause de l'égalité des angles C et O,
arc BA : arc DE :: circ. AC : circ. OD :: AC : OD.

2° On a pareillement* :

sect. ACB : cerc. AC :: C : 4^{dr}.

sect. DOE : cerc. DO :: O : 4^{dr};

* pr. 18,
liv. 2.

d'où

sect. ABC : sect. DOE :: cerc. AC : cerc. DO :: $\overline{AC}$: $\overline{DO}$.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

L'aire du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.



Dans le cercle dont le rayon est OA, inscrivons un polygone régulier. Soit P le périmètre de ce polygone, et S sa surface ; on a :

$$S = P \times \frac{1}{2} OC.$$

Or l'aire d'un cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits dont le nombre des côtés croît indéfiniment ; on aura la mesure du cercle en cherchant vers quelle limite tend le produit $P \times \frac{1}{2} OC$. Or P a pour limite circ. OA, et OC a pour limite OA ; donc

$$\text{surf. cercle OA} = \text{circ. OA} \times \frac{1}{2} OA.$$

Remarque. Représentons par R le rayon du cercle, on a circ. R = $2\pi R$. Donc

$$\text{surf. cerc.} = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

Application. Soit R = 3", et prenons $\pi = 3,1415$, on a

$$\text{surf. cerc.} = 28^{\text{m. } 6}, 2735.$$



Corollaire. La surface d'un secteur est égale à l'arc de ce secteur multiplié par la moitié du rayon.

Car le secteur ACB est au cercle entier comme l'arc AMB est à la circonférence entière ABD*, ou comme $AMB \times \frac{1}{2} AC$ est à *

pr. 18,
liv. 2.

$ABD \times \frac{AC}{2}$. Mais le cercle entier $= ABD \times \frac{1}{2} AC$; donc le secteur ACB a pour mesure $AMB \times \frac{1}{2} AC$.

Application. Soit $AC = 12^m$, et supposons que l'arc AMB renferme 60° . Pour trouver la longueur de cet arc, on posera la proportion

$$\text{arc AMB} : 2\pi R :: 60 : 360,$$

$$\text{d'où arc AMB} = \frac{2\pi R \times 60}{360} = \frac{\pi \cdot R}{3} = \frac{\pi \cdot 12}{3} = 4\pi,$$

$$\text{on a donc sect. ACB} = 4\pi \times 6 = 24\pi = 75^m, 3960.$$

PROBLÈMES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS; DÉTERMINATION
DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE.

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

Connaissant le côté AB d'un polygone régulier inscrit, et le rayon OC du cercle, calculer le côté AC du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double.



Soient $AB = a$, $OC = R$ et $AC = c$; tirons AD et AO, on a dans le triangle rectangle CAD :

$$\overline{AC}^2 = CD \times CI, \text{ ou } c^2 = 2R \times CI;$$

$$\text{or, } CI = CO - OI = R - OI;$$

d'ailleurs on a dans le triangle rectangle AOI

$$OI = \sqrt{R^2 - \overline{AI}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}};$$

donc

$$CI = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},$$

et par suite $c^2 = 2R \times \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right)$. (1)

§ Réciproquement, on peut se proposer de calculer a connaissant c ; et il faudra alors résoudre l'équation (1) par rapport à a ; on obtient ainsi :

$$a^2 = \frac{c^2 \cdot (4R^2 - c^2)}{R^2}. \quad (2)$$

Pour faire application de la formule (1), supposons que a soit le côté de l'hexagone, et que par conséquent $a=R$: on aura pour le côté du dodécagone régulier inscrit :

$$c = \sqrt{2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} \right)} = \sqrt{2R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Pour appliquer la formule (2), prenons c égal au côté du décagone, et cherchons le côté du pentagone régulier.

On a $c = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$; on en conclut :

$$a^2 = \frac{\frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4} \left[4R^2 - \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4} \right]}{R^2} = \frac{R^2}{4} (10 - 2\sqrt{5});$$

d'où $a = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$

Remarque. En ajoutant le carré du rayon avec le carré du côté du décagone, on trouve que la somme

$$R^2 + \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}$$

est égale à $\frac{R^2(10 - 2\sqrt{5})}{4}$, c'est-à-dire au carré du côté du pentagone régulier. Ainsi

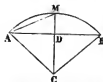
Le côté du pentagone régulier inscrit serait l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit le rayon et le côté du décagone.

donc

$$S = \frac{ma\sqrt{4R^2 - a^2}}{4}.$$

Application. Cherchons la surface de l'hexagone régulier. On a $a = R$, $m = 6$; donc

$$S = \frac{6R\sqrt{4R^2 - R^2}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$



Remarque. On pourrait aussi, au moyen des mêmes données, calculer la surface du polygone régulier inscrit de $2m$ côtés. En effet, soit M le milieu de l'arc AB, et tirons AM; la surface du polygone cherché (que nous désignerons par S') se compose de $2m$ triangles égaux à ACM.

$$\text{Or, } ACM = CM \times \frac{AD}{2} = \frac{R \times a}{4};$$

$$\text{donc } S' = 2m \times \frac{R \times a}{4} = \frac{mRa}{2}.$$

Cherchons, comme application, la surface du dodécagone régulier inscrit; on a

$$a = R, \quad m = 6, \quad \text{d'où } S' = \frac{6R^2}{2} = 3R^2.$$

PROPOSITION XV.

PROBLÈME.



Étant donnés le rayon $CD = R$, et l'apothème $CA = r$ d'un polygone régulier, calculer le rayon R , et l'apothème r' d'un polygone régulier isopérimètre d'un nombre double de côtés.

Soit BD le côté du polygone régulier donné, et C le centre de ce polygone. Prolongeons l'apothème CA jusqu'à sa rencontre en I avec la circon-

férence circonscrite, et tirons les droites BI, DI; BID sera l'angle au centre du polygone cherché, car il est la moitié de BCD. Si de plus on abaisse CK perpendiculaire sur BI, et qu'on mène KE parallèle à BD, KE sera la moitié de BD, et représentera le côté du nouveau polygone; IK en sera le rayon, et HI l'apothème.

$$\text{Or, on a} \quad IH = \frac{IA}{2} = \frac{CI + CA}{2},$$

$$\text{ou} \quad r' = \frac{R + r}{2}. \quad (1)$$

Enfin, dans le triangle rectangle CKI, on a

$$IK^2 = IC \times IH, \text{ ou } R' = \sqrt{R \cdot r'} = \sqrt{R \times \frac{(R+r)}{2}}. \quad (2)$$

Scolie. Il est facile de voir, soit par la figure, soit par les formules, que r' est plus grand que r , et qu'au contraire R' est moindre que R ; de sorte que, dans le nouveau polygone, la différence entre le rayon et l'apothème est moindre que dans le premier.

Si l'on transformait de la même manière le second polygone en un troisième, puis le troisième en un quatrième, et ainsi de suite, on parviendrait à un polygone dans lequel la différence entre le rayon et l'apothème serait moindre que toute grandeur donnée.

En effet, dans le triangle BCA, on a

$$BC - CA < BA \text{ ou } R - r < BA;$$

mais BA est la moitié du côté du polygone, et ce côté peut être rendu plus petit que toute grandeur donnée, quand on double indéfiniment le nombre des côtés; donc aussi $R - r$ peut devenir plus petit que toute quantité assignable.

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME.

Trouver une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre.

On a, d'après la définition $\pi = \frac{\text{circ. } R}{2R}$, (1)

et il a été démontré en outre que $\pi = \frac{\text{cerc. } R}{R^2}$. (2)

De là résultent quatre méthodes pour trouver la valeur de π .

Car, si l'on considère la formule (1), on peut, connaissant la longueur de la circonférence, calculer le rayon, ou bien, connaissant le rayon, chercher la circonférence; et si l'on emploie la formule (2), on peut se proposer, connaissant le rayon, de trouver la surface du cercle, ou bien, connaissant l'aire d'un cercle, de calculer le rayon.

Nous exposerons les deux premières méthodes, et nous nous proposerons d'abord de calculer le rayon d'une circonférence dont la longueur serait 4.

Construisons un carré, et prenons le côté de ce carré pour unité, le périmètre sera 4.

Soient R et r le rayon et l'apothème de ce carré, on a :

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{1}{2}.$$

Maintenant ce carré peut être transformé en un octogone régulier de même périmètre, et, en appliquant les formules du problème précédent, on trouvera pour le rayon et l'apothème de cet octogone :

$$R_1 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{8}}, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}.$$

On calculerait de même les rayons R_2, r_2 du polygone régulier isopérimètre de 16 côtés; et en continuant ainsi, on arriverait à un polygone dont le périmètre serait toujours 4, et dont les rayons R_n, r_n différeraient d'aussi peu qu'on voudrait.

Or les circonférences décrites avec R_n et r_n sont l'une plus grande, l'autre plus petite que 4; le rayon de la circonférence égale à 4 est donc compris entre R_n et r_n , et

peut être obtenu avec telle approximation qu'on voudra.

Si les rayons R_n, r_n sont évalués en décimales, il est évident que les décimales communes appartiendront au rayon cherché.

Voici le tableau des valeurs successives du rayon et de l'apothème, dans les polygones de 4, 8, 16... 8192 côtés.

NOMBRE DES CÔTÉS.	APOTHÈMES.	RAYONS.
4	$r_1 = 0,5000000$	$R_1 = 0,7071068$
8	$r_2 = 0,6035534$	$R_2 = 0,6532815$
16	$r_3 = 0,6284174$	$R_3 = 0,6407289$
32	$r_4 = 0,6345731$	$R_4 = 0,6376435$
64	$r_5 = 0,6361083$	$R_5 = 0,6368754$
128	$r_6 = 0,6364919$	$R_6 = 0,6366836$
256	$r_7 = 0,6365878$	$R_7 = 0,6366357$
512	$r_8 = 0,6366117$	$R_8 = 0,6366237$
1024	$r_9 = 0,6366177$	$R_9 = 0,6366207$
2048	$r_{10} = 0,6366192$	$R_{10} = 0,6366199$
4096	$r_{11} = 0,6366195$	$R_{11} = 0,6366197$
8192	$r_{12} = 0,6366196$	$R_{12} = 0,6366196$

Ainsi une circonférence égale à 4 a pour rayon 0,6366196..... d'où il résulte que le rapport de la circonférence au diamètre, vaut

$$\frac{40000000}{12732392} = 3,1415926.....$$

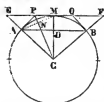
Archimède avait trouvé $\frac{22}{7}$ pour valeur approchée de π ; Metius a trouvé, pour le même nombre, la valeur beaucoup plus approchée $\frac{355}{113}$.

PROPOSITION XVII.

PROBLÈME.

Étant donnés les périmètres p, P , de deux polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit à un

même cercle, calculer les périmètres p' , P' , des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.



Soient AB, EF, les côtés des polygones dont les périmètres sont p , P , et soit m le nombre de ces côtés. Menons la corde AM, puis aux points A et B, construisons les tangentes AP, BQ; enfin tirons la droite PC; AM et PQ seront les côtés des polygones inscrit et circonscrit de $2m$ côtés, dont les périmètres sont p' , P' . Cela posé, on a *

$$P:p :: CE:CA \text{ ou } CM;$$

et comme CP est la bissectrice de l'angle ECM, on a aussi $PE:PM :: CE:CM$; donc, à cause du rapport commun, $P:p :: PE:PM$; d'où il résulte, *componendo*,

$$P+p:2p :: EM:2PM \text{ ou } PQ.$$

Mais les droites EM, PQ, sont contenues $2m$ fois dans les périmètres P , P' ; donc

$$P+p:2p :: P:P'; \text{ d'où } P' = \frac{2Pp}{P+p}. \quad (1)$$

Pour calculer p' , on remarque que les deux triangles PMN, MAD, équiangles entre eux, sont semblables et donnent la proportion

$$AM:AD :: PM:MN.$$

Mais les droites AM, AD, sont contenues $2m$ fois dans p' et p ; et les droites PM, MN, sont contenues $4m$ fois dans P' et p' ; donc

$$p':p :: P':p'; \text{ d'où } p' = \sqrt{P'p}. \quad (2)$$

Corollaire. Ces formules permettent d'évaluer le nombre π avec telle approximation qu'on voudra; car, si dans un cercle dont le rayon est l'unité linéaire on inscrit et circonscrit deux carrés dont les périmètres seront $4\sqrt{2}$ et 8, on pourra calculer par les formules (1) et (2) les périmètres

* 8.

tres des octogones réguliers inscrit et circonscrit ; à l'aide des octogones, on obtiendra les périmètres des polygones réguliers de 16 côtés, et ainsi de suite. Or on sait que, dans cette suite d'opérations, les périmètres des polygones s'approchent indéfiniment de la longueur de la circonférence ; on pourra donc calculer celle-ci avec toute l'approximation désirable, et, en la divisant par 2, on aura le nombre π .

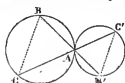


GÉOMÉTRIE PLANE.

THÉORÈMES À DÉMONTRER.

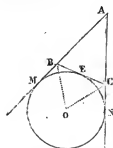
1. La figure qui a pour sommets les milieux des côtés d'un quadrilatère, est un parallélogramme.

2. Si, d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, la somme de ces perpendiculaires est constante. (Examiner ce que devient le théorème quand le point est extérieur au triangle.)



3. Par le point de contact A de deux cercles tangents, on mène deux sécantes quelconques BB' , CC' : prouver que les droites BC , $B'C'$ sont parallèles.

4. Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres. (La réciproque est vraie.)



5. On suppose le cercle O tangent aux deux côtés de l'angle A, puis on mène une tangente BEC terminée aux deux côtés de l'angle : prouver, 1° que le périmètre du triangle ABC est constant, quel que soit le point de l'arc MEN par lequel on mène la tangente ; 2° que l'angle BOC est constant.

6. Si on joint deux à deux les pieds des trois hauteurs d'un triangle, on forme un nouveau triangle dans lequel les bissectrices des angles sont les hauteurs du premier triangle.

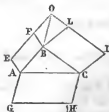
7. Les pieds des hauteurs d'un triangle et les milieux des trois côtés sont sur une même circonférence.

8. Étant donné un quadrilatère, si l'on mène des cercles tan-

gents à trois côtés consécutifs, les centres des quatre cercles qu'on obtient ainsi forment un quadrilatère inscriptible.

9. Les bissectrices des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible se coupent à angle droit.

10. Si d'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.



11. On construit sur les deux côtés AB, BC d'un triangle ABC, les parallélogrammes quelconques ABFE, BCDL; on prolonge EF et LD jusqu'en O, et on tire OB; enfin on construit sur AC un parallélogramme dont le côté adjacent est égal et parallèle à OB: démontrer que ce parallélogramme est équivalent à la somme des deux autres. (En déduire comme conséquence le carré de l'hypoténuse.)

12. Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

13. Les lignes qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés se coupent en un même point.

14. Le point de concours des hauteurs d'un triangle, le point de concours des médianes, et le centre du cercle circonscrit, sont en ligne droite; et la distance des deux premiers points est double de la distance des deux derniers.

15. Si d'un point donné on mène à un cercle deux sécantes perpendiculaires entre elles, la somme des carrés des cordes sera constante.

16. Lorsque trois cercles se coupent deux à deux, les trois cordes d'intersection se coupent au même point.



17. Si du point A, milieu de l'arc BC, on mène les deux sécantes AFD, AGE, les quatre points D, F, G, E, sont sur une même circonférence.

18. Lorsque trois cercles sont tangents deux à deux, les tangentes menées aux points de contact se coupent en un même point.

19. La somme des carrés des diagonales d'un quadrilatère est

double de la somme des carrés des lignes qui joignent les milieux des côtés opposés.

20. Dans un triangle on mène une suite de parallèles à la base, et on mène les diagonales de chacun des trapèzes qu'on forme ainsi : prouver que les points de concours des diagonales de ces trapèzes sont sur une droite qui va du sommet au milieu de la base.

21. Démontrer que si l'on a un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence sur deux côtés opposés est égal au produit des perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres côtés.

22. Si d'un point pris dans l'intérieur d'un polygone régulier de m côtés, on abaisse des perpendiculaires sur tous les côtés, la somme de ces perpendiculaires est égale à m fois le rayon du cercle inscrit.

23. Si de tous les sommets d'un polygone régulier on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque passant par le centre, la somme des perpendiculaires qui tombent d'un côté de cette droite est égale à la somme des perpendiculaires qui sont situées de l'autre côté.

24. Démontrer que si l'on fait rouler un cercle dans un autre cercle fixe de position et de rayon double, de manière que les deux cercles soient toujours tangents, un point quelconque du premier cercle décrira dans ce mouvement une ligne droite.

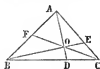
25. Démontrer que les trois droites qui joignent les sommets d'un triangle aux sommets opposés des triangles équilatéraux construits sur les trois côtés se coupent en un même point.

26. Démontrer que la somme des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un triangle du centre du cercle circonscrit est égale au rayon du cercle circonscrit, plus au rayon du cercle inscrit.

27. Démontrer que, dans un trapèze, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés opposés non parallèles, plus deux fois le rectangle des bases parallèles.

28. Démontrer que si, dans un triangle ABC, trois droites partant des sommets se coupent en un même point O, on a

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{BF} = 1.$$



29. Deux circonférences concentriques étant données, prouver que la somme des carrés des distances d'un point quelconque de l'une des circonférences aux extrémités d'un diamètre de l'autre est constante.

30. Deux quadrilatères sont équivalents lorsque leurs diagonales sont égales et forment entre elles des angles égaux.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES A TROUVER.

1. Trouver le lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à deux droites données soit égale à une ligne donnée.

2. Trouver le lieu des points tels que la différence des distances de chacun d'eux à deux droites soit égale à une ligne donnée.

3. Lieu géométrique des centres des cercles passant par deux points donnés.

4. Lieu géométrique des centres des cercles d'un rayon donné et tangents à une droite donnée.

5. Lieu géométrique des centres des cercles d'un rayon donné et tangents à un cercle donné.

6. Par tous les points d'une circonférence on mène des droites parallèles entre elles, et on prend sur chacune une longueur donnée : trouver le lieu des extrémités de toutes ces droites.

7. Trouver le lieu des milieux des cordes d'un cercle passant toutes par un point donné.

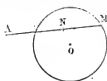
8. Trouver le lieu des points d'où les tangentes menées à un cercle se coupent sous un angle donné.

9. Trouver le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les trois côtés d'un triangle soient en ligne droite.

10. Trouver le lieu des points dont les distances à deux droites sont dans un rapport donné.

11. Trouver le lieu des points tels que la somme ou la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés soit égale à un carré donné.

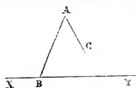
12. Étant donnés deux cercles, trouver le lieu des points tels que les tangentes tirées de ces points aux deux cercles soient égales.



13. On mène par un point A une droite AM terminée à la circonférence O, et on divise cette droite au point N, de sorte qu'on ait $AM : AN :: m : n$: trouver le lieu des points N.

14. Ayant mené par le point donné A, la droite AM terminée à la circonférence O, on prend sur cette droite un point N tel que $AM \times AN = K^2$: trouver le lieu des points N.

Résoudre les deux problèmes précédents en remplaçant la circonférence par une ligne droite.



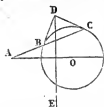
15. Par un point A, on mène une ligne AB terminée à la droite donnée XY; on mène AC telle que l'angle BAC soit égal à un angle donné; et que l'on ait : $AB : AC :: m : n$, ou bien $AB \times AC = K^2$: trouver le lieu des points C.

Mêmes problèmes en remplaçant la ligne droite XY par une circonférence.

16. Trouver le lieu des points d'où deux cercles donnés sont vus sous le même angle.

17. Sur deux droites rectangulaires on fait glisser une droite de longueur donnée : on demande le lieu des milieux des hypoténuses des triangles ainsi formés.

18. Étant donné un triangle équilatéral, trouver le lieu des points tels que la distance de l'un d'eux à l'un des sommets du triangle équilatéral soit égale à la somme des distances du même point aux deux autres sommets.



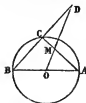
19. Par un point A pris dans le plan d'un cercle O, on mène une sécante AC, et les tangentes aux points B et C, on demande le lieu des points D. (Le lieu est une droite DE, perpendiculaire sur le diamètre passant par le point A; cette droite est appelée la polaire du point A, et ce point est

le pôle de la droite DE.)

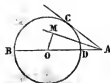
20. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux sommets d'un triangle équilatéral soit égale à un carré donné.

21. Même problème, en remplaçant le triangle équilatéral par un polygone régulier quelconque.

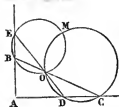
22. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux côtés d'un polygone régulier soit égale à un carré donné.



23. Soit AB un diamètre du cercle BO; tracez une sécante BCD, et prenez $CD = BC$; joignez le point D au centre du cercle, et le point C au point A: on demande le lieu du point M d'intersection des droites AC, OD.



24. D'un point quelconque A du prolongement du diamètre BD, tracez la tangente AC, la bissectrice de l'angle CAO, et abaissez OM perpendiculaire sur AM; on demande le lieu du point M.



25. Par un point O de l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC, tracez une sécante quelconque DE; décrivez les cercles OBE, OCD; on demande le lieu du point M de rencontre de ces deux cercles.



26. Étant donné un cercle BO et un diamètre AB, menez un rayon quelconque OC, tracez CD perpendiculaire sur AB, et prenez $OM = CD$; on demande le lieu du point M.



27. Dans un quadrilatère ABCD, on donne AB, BC, AC et CD; on demande 1° le lieu géométrique du milieu de la diagonale BD, 2° le lieu géométrique du milieu de la droite EF qui joint les milieux des deux diagonales.

28. Trouver le lieu de tous les points tels que la somme des distances d'un de ces points à trois droites données soit égale à une ligne donnée.

PROBLÈMES À RÉSOUDRE.

1. Par un point mener une droite également distante de deux points donnés.



2. Étant donnés deux points A et B, trouver, sur la ligne ST, un point P tel que les angles APS, BPT, soient égaux.

3. Par un point mener une droite qui coupe deux parallèles, et telle que la partie de cette droite comprise entre ces deux parallèles soit égale à une ligne donnée.

4. Construire un carré, connaissant la différence entre la diagonale et le côté du carré.

5. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

6. Décrire un cercle d'un rayon donné :

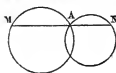
- 1^o Passant par deux points;
- 2^o Passant par un point, et tangent à une droite;
- 3^o Tangent à deux droites;
- 4^o Tangent à une droite et à un cercle;
- 5^o Passant par un point, et tangent à un cercle;
- 6^o Tangent à deux cercles.

7. Mener dans un cercle une droite passant par un point donné, et telle que la corde interceptée soit égale à une ligne donnée.

8. Décrire un cercle tangent à un cercle et à une droite, en un point donné.

9. Construire un cercle tangent à un cercle en un point donné, et passant par un point donné.

10. Construire un triangle égal à un triangle donné, et dont les côtés passent par trois points donnés.



11. Étant données deux circonférences qui se coupent, mener, par un de leurs points d'intersection, une droite MN, telle que la distance MN, comprise entre les deux points d'intersection de cette droite

avec les deux circonférences, soit égale à une droite donnée.

12. Mener par le point A la droite MAN, de sorte qu'on ait $MA : AN :: m : n$.

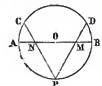
13. Mener par le point A la droite MAN, de sorte que $AM = AN$.

14. Étant données deux circonférences, mener une sécante parallèle à une ligne donnée, telle que la somme des cordes soit égale à une ligne donnée.

15. Construire un quadrilatère, connaissant deux angles opposés, les diagonales et leur angle.

16. Étant donnés deux cercles, trouver un point tel que les tangentes menées à ce cercle soient égales, et fassent un angle donné.

17. Étant donné l'arc CD, et le diamètre AB, trouver sur la circonférence un point P, tel qu'en tirant les droites PD, PC, on ait $OM = ON$.



18. Inscrire dans un cercle un triangle isocèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur.

19. Construire un triangle, connaissant les trois médianes.

20. Construire un triangle, connaissant les trois hauteurs.

21. Construire un triangle, connaissant les angles et le périmètre, ou bien les angles et la surface.

22. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé, et le rapport des deux autres côtés.

23. Construire un triangle, connaissant la base, la hauteur et le rectangle des deux autres côtés.

24. Deux droites étant données, qu'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de concours, mener, par un point donné, une droite qui irait à ce point de concours.

25. Trouver dans un triangle un point tel qu'en le joignant aux trois sommets, le triangle soit partagé en trois triangles équivalents.

26. Décrire un cercle passant par un point, et tangent à deux cercles donnés.

27. Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

28. Construire un trapèze, connaissant les angles et les diagonales.

29. Étant données trois circonférences concentriques, construire un triangle semblable à un triangle donné, dont les trois sommets reposent sur ces circonférences.

Même problème, en remplaçant les circonférences par trois droites parallèles.

30. Par un point donné dans un angle mener une droite, telle que le produit des segments compris entre le point et chacune des droites soit égal à un carré donné.

31. Par un point donné dans le plan d'un cercle, mener une droite, telle que les distances de ce point aux points d'intersection de la droite et du cercle soient entre elles dans le rapport de m à n .

32. Par un point donné et par le centre d'un cercle, faire passer une circonférence, telle que la corde commune soit égale à une ligne donnée.



LIVRE V.

DU PLAN ET DE LA LIGNE DROITE, CONSIDÉRÉS
DANS L'ESPACE.

DÉFINITIONS.

I. Une ligne droite est *perpendiculaire à un plan*, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites qui passent
* pr. 4. par son *pied* dans le plan*. Réciproquement, le plan est perpendiculaire à la ligne.

Le *pied* de la perpendiculaire est le point où cette ligne rencontre le plan.

II. Une ligne est *parallèle à un plan*, lorsqu'elle ne peut le rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'un et l'autre. Réciproquement, le plan est parallèle à la ligne.

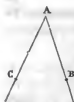
III. Deux *plans* sont *parallèles* entre eux, lorsqu'ils ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'un et l'autre.

IV. Pour représenter les plans dans les figures, on est obligé de leur donner des limites, mais il faut toujours les concevoir indéfinis.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

— Par deux droites qui se coupent, on peut faire passer un plan, et on n'en peut faire passer qu'un seul.



Soient AB, AC , deux droites qui se coupent : on peut concevoir un plan où se trouve la ligne AB ; si ensuite on fait tourner ce plan autour de AB , jusqu'à ce qu'il passe par le point C : alors la ligne AC , qui a deux de ses points dans ce plan, y sera tout entière, et la position du plan sera déterminée dans l'espace.

Si l'on continue à faire tourner le plan autour de AB , il est évident qu'il ne contiendra plus le point C ; donc par les deux droites AB, AC , on ne peut faire passer qu'un seul plan.



Corollaire I. Un triangle ABC , ou trois points A, B, C , non en ligne droite, déterminent la position d'un plan.

Corollaire II. Deux parallèles AB, CD , déterminent aussi la position d'un plan, car on sait déjà que deux parallèles sont dans un même plan ; et on ne peut pas supposer que deux plans différents renferment ces deux droites, puisque chacun d'eux devrait contenir deux points de AB et un point de CD , c'est-à-dire trois points non en ligne droite.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

L'intersection de deux plans est une ligne droite.

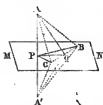
Car, si dans les points communs aux deux plans on en trouvait trois qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans dont il s'agit, passant chacun par ces trois points, ne feraient qu'un seul et même plan*, ce qui est contre la supposition.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Si une droite AP est perpendiculaire à deux autres PB, PC , qui se croisent à son pied dans le plan MN ,

elle sera perpendiculaire à une droite quelconque PQ menée par son pied dans le même plan, et ainsi elle sera perpendiculaire au plan.



Menez, dans le plan MN, une droite BC qui coupe les trois droites PB, PQ, PC; prolongez AP d'une longueur $PA' = AP$, et joignez les points A, A' aux points B, Q, C.

La ligne PC étant perpendiculaire sur le milieu de AA', les obliques CA, CA' sont égales; par la même raison $BA = BA'$. On conclut de là que les triangles BCA, BCA', sont égaux comme ayant le côté BC commun, et les autres côtés égaux chacun à chacun. Si donc on fait tourner le triangle BCA' autour de BC pour l'appliquer sur son égal BCA, le point A' tombera en A, et comme le point Q ne change pas, la ligne QA' s'appliquera exactement sur QA.

La droite PQ est donc perpendiculaire sur AA', puisque deux de ses points P et Q sont également distants des extrémités de cette droite.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Par un point donné on peut mener une perpendiculaire à un plan, et on n'en peut mener qu'une.



1° Supposons d'abord que le point donné O soit situé dans le plan MN.

Prenons une droite quelconque AB; menons deux plans par cette droite, puis dans ces plans élevons au point B, les droites BC, BD, perpendiculaires sur AB. En vertu du théorème précédent, la droite AB sera perpendiculaire au plan des deux droites BC, BD.

Maintenant transportons cette figure de manière que le plan CBD coïncide avec le plan MN, et faisons glisser CBD sur le plan MN, de manière que le point B tombe en O ; les droites BC, BD prendront les positions OC, OD, et la droite BA prendra la position OF, évidemment perpendiculaire au plan MN.

Supposons, en second lieu, que le point donné F soit situé hors du plan MN.

Ayant construit, comme précédemment, la figure ABCD ; portons-la de manière que le plan BCD coïncide avec le plan MN ; et faisons glisser le plan BCD sur le plan MN, de manière que la ligne BA passe par le point F ; la droite BA prendra la position FO, et sera perpendiculaire au plan MN.



2° Par un point O donné sur le plan MN, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à ce plan ; car si on pouvait en élever deux OA, OB, conduisez par ces deux droites un plan dont l'intersection avec le plan MN soit OC. Alors les deux droites OA, OB seraient perpendiculaires sur OC au même point et dans le même plan, ce qui est impossible.



Pareillement, il est impossible d'abaisser d'un point hors d'un plan, deux perpendiculaires à ce plan ; car soient FA, FB ces deux perpendiculaires ; le triangle FAB aurait deux angles droits, ce qui est impossible.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Par un point on peut mener un plan perpendiculaire à une droite, et on n'en peut mener qu'un seul.

ce plan contient toutes les autres perpendiculaires. Or si BE n'était pas dans le plan MN, le plan mené par les deux droites AB, BE, couperait MN suivant la droite BH; et on aurait au même point et dans un même plan deux lignes BE, BH perpendiculaires sur AB.

PROPOSITION VI.

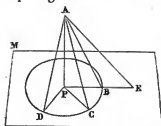
THÉORÈME.

Si d'un point A, hors du plan MN, on mène la perpendiculaire AP et les obliques AD, AC, AE,

1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;

2° Les obliques également éloignées de la perpendiculaire, sont égales;

3° De deux obliques inégalement éloignées du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus grande.



1° Le triangle APC est rectangle en P, et par suite, l'oblique AC, opposée à l'angle droit, est plus grande que la perpendiculaire AP.

2° Les angles APC, APD étant droits, si l'on suppose $PC = PD$, les triangles APC, APD, auront un angle égal compris entre côtés égaux; donc ils sont égaux, et l'on aura $AC = AD$.

*3° Si la distance PE est plus grande que PD, prenons $PB = PD$ et joignons AB; on aura $AB = AD$. Or AB est plus petit que AE *, donc AD est plus petit que AE.*

* 16, 1.

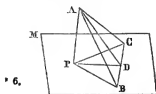
Corollaire. Toutes les obliques égales AB, AC, AD, etc., aboutissent à la circonférence BCD, décrite du pied de la perpendiculaire P comme centre; donc, étant donné un

point A hors d'un plan, si on veut trouver sur ce plan le point P où tomberait la perpendiculaire abaissée de A, il faut marquer sur ce plan trois points B, C, D, également éloignés du point A, et chercher ensuite le centre du cercle qui passe par ces points; ce centre sera le point cherché P.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Soit AP une perpendiculaire au plan MN et BC une ligne située dans ce plan : si du pied P de la perpendiculaire on abaisse PD perpendiculaire sur BC, et qu'on joigne AD, je dis que AD sera perpendiculaire à BC.



Prenez $DB = DC$, et joignez PB, PC, AB, AC : puisque $DB = DC$, l'oblique $PB = PC$; et par rapport à la perpendiculaire AP, puisque $PB = PC$, l'oblique $AB = AC$ * ;

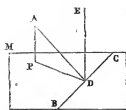
donc la ligne AD a deux de ses points A et D également distants des extrémités B et C ; donc AD est perpendiculaire sur le milieu de BC.

Corollaire. On voit en même temps que BC est perpendiculaire au plan APD, puisque BC est perpendiculaire à la fois aux deux droites AD, PD.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Si la ligne AP est perpendiculaire au plan MN, toute ligne DE parallèle à AP sera perpendiculaire au même plan.



Suivant les parallèles AP , DE , conduisez un plan dont l'intersection avec le plan MN sera PD ; dans le plan MN menez BC perpendiculaire à PD , et joignez AD .

Suivant le corollaire du théorème précédent, BC est perpendiculaire au plan $APDE$; donc l'angle BDE est droit : mais l'angle EDP est droit aussi, puisque AP est perpendiculaire à PD , et que DE est parallèle à AP ; donc la ligne DE est perpendiculaire aux deux droites DP , DB ; donc elle est perpendiculaire à leur plan MN .

Corollaire I. Réciproquement si les droites AP , DE , sont perpendiculaires au plan MN , elles seront parallèles; car, si elles ne l'étaient pas, conduisez par le point D une parallèle à AP , cette parallèle sera perpendiculaire au plan MN ; donc on pourrait par un même point D , élever deux perpendiculaires à un même plan, ce qui est impossible*. * 4.

Corollaire II. Deux lignes A et B , parallèles à une troisième C , sont parallèles entre elles; car imaginez un plan perpendiculaire à la ligne C , les lignes A et B , parallèles à cette perpendiculaire, seront perpendiculaires au même plan; donc, par le corollaire précédent, elles seront parallèles entre elles.

Il est entendu que les trois lignes ne sont pas dans le même plan, sans quoi la proposition serait déjà connue.

PROPOSITION IX.

THÉOREME.

Par un point A on ne peut mener dans l'espace qu'une parallèle à la ligne CD .

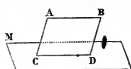
A ————— Car une parallèle à CD , menée par le point
 A , est située dans le plan qui passe par ce
 C ————— point et par la droite CD ; et l'on sait que

dans un plan on ne peut mener par un point donné qu'une seule parallèle à une droite.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Si la ligne AB est parallèle à une droite CD menée dans le plan MN, elle sera parallèle à ce plan.



Car si la ligne AB, qui est dans le plan ABCD, rencontrait le plan MN, ce ne pourrait être qu'en quelque point de la ligne CD, intersection commune des deux plans : or, AB ne peut rencontrer CD, puisqu'elle lui est parallèle ; donc elle ne rencontrera pas non plus le plan MN ; donc elle est parallèle à ce plan.

Corollaire I. Si une droite AB est parallèle au plan MN, tout plan ABCD mené par AB couperait MN suivant une droite CD parallèle à AB.

En effet, les droites AB, CD, étant dans le même plan ABCD, si la ligne AB rencontrait CD, elle rencontrerait le plan MN, ce qui est contre l'hypothèse.



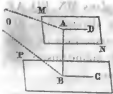
Corollaire II. Si, par un point C d'un plan MN parallèle à la droite AB, on mène une ligne CD parallèle à cette droite, cette parallèle sera située dans le plan MN.

Car, s'il en était autrement, le plan mené par la droite AB et le point C couperait MN suivant une ligne CE parallèle à AB, et on pourrait par un point mener deux parallèles à une droite.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Deux plans MN, PQ, perpendiculaires à une même droite AB, sont parallèles entre eux.

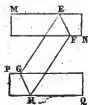


Car, s'ils se rencontraient quelque part, soit O un de leurs points communs, et joignez OA , OB ; la ligne AB , perpendiculaire au plan MN , est perpendiculaire à la droite OA menée par son pied dans ce plan; par la même raison, AB est perpendiculaire à BO ; donc OA et OB seraient deux perpendiculaires abaissées du même point O sur la même ligne droite, ce qui est impossible; donc les plans MN , PQ , ne peuvent se rencontrer; donc ils sont parallèles.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Les intersections EF , GH , de deux plans parallèles MN , PQ , par un troisième plan FG , sont parallèles.



Car, si les lignes EF , GH , situées dans un même plan, ne sont pas parallèles, prolongées elles se rencontreraient; donc les plans MN , PQ , dans lesquels elles sont, se rencontreraient aussi; donc ils ne seraient pas parallèles.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Par un point A on peut mener un plan parallèle au plan MN , et on n'en peut mener qu'un seul.



1° Du point A abaissez AB perpendiculaire sur MN , puis au point A menez le plan PQ perpendiculaire sur AB ; le plan PQ sera parallèle à MN .

2° S'il existait un second plan AF passant par le point A , et parallèle à MN , un plan

quelconque mené par AB couperait les plans MN, PQ, AF, suivant les droites BD, AG, AE. Or les droites AG, BD, seraient parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles par un troisième ; par la même raison, AE serait parallèle à BD, ce qui est absurde.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

La ligne AB, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire au plan PQ, parallèle à MN.



Ayant tiré à volonté la ligne AD dans le plan MN, suivant AB et AD, conduisez un plan BAD, qui coupera nécessairement le plan PQ, sans quoi on pourrait par le point A mener deux plans parallèles à PQ. De plus l'intersection BC du plan BAD et du plan PQ sera parallèle à AD* ; mais la ligne AB, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à la droite AD ; donc elle sera aussi perpendiculaire à sa parallèle BC.

*12.

On verrait de même que AB serait perpendiculaire à une autre droite passant par son pied dans le plan PQ ; donc elle est perpendiculaire à ce plan.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Deux plans A, B, parallèles à un troisième C, sont parallèles entre eux.



Menez DF perpendiculaire au plan C ; cette droite est perpendiculaire aux plans A et B, en vertu du théorème précédent ; donc ces plans sont parallèles, comme étant perpendiculaires à une même droite.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Les parallèles EG, FH, comprises entre deux plans parallèles MN, PQ, sont égales.



Par les parallèles EG, FH, faites passer le plan EGHF, qui rencontrera les plans parallèles suivant EF et GH. Les intersections EF, GH, sont parallèles entre elles *, ainsi que EG, FH ; donc la figure EGHF est un parallélogramme ; donc $EG = FH$.

* 12.

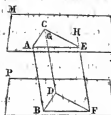
Corollaire. Il suit de là que deux plans parallèles sont partout à égale distance ; car si EG et FH sont perpendiculaires aux deux plans MN, PQ, elles seront parallèles entre elles * ; donc elles sont égales.

* 8.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Si deux angles CAE, DBF, non situés dans le même plan, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ces angles seront égaux et leurs plans seront parallèles.



Prenez $AC = BD$, $AE = BF$, et joignez CE, DF, AB, CD, EF. Puisque AC est égale et parallèle à BD, la figure ABCD est un parallélogramme ; donc CD est égale et parallèle à AB. Par une raison semblable EF est égale et parallèle à AB ; donc aussi CD est égale et parallèle à EF : la figure CEFD est donc un parallélogramme, et ainsi le côté CE est égal et parallèle à DF ; donc les triangles CAE, DBF sont équilatéraux entre eux ; donc l'angle $CAE = DBF$.

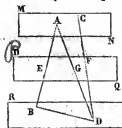
En second lieu je dis que le plan ACE est parallèle au plan BDF ; car supposons que le plan parallèle à BDF , mené par le point A , rencontre les lignes CD , EF , en d'autres points que C et E , par exemple en G et H ; alors , suivant la proposition xvi , les trois lignes AB , GD , FH , seront égales : mais les trois AB , CD , EF , le sont déjà ; donc on aurait $CD = GD$, et $FH = EF$, ce qui est absurde ; donc le plan ACE est parallèle à BDF .

Corollaire. Si deux plans parallèles MN , PQ , sont rencontrés par deux autres plans CABD , EABF , les angles CAE , BDF , formés par les intersections des plans parallèles , seront égaux ; car l'intersection AC est parallèle à BD* , AE l'est à BF , donc l'angle $CAE = DBF$.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Deux droites comprises entre trois plans parallèles , sont coupées en parties proportionnelles.

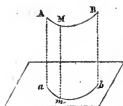


Supposons que la ligne AB rencontre les plans parallèles MN , PQ , RS , en A , E , B , et que la ligne CD rencontre les mêmes plans en C , F , D ; je dis qu'on aura $AE : CF :: BE : FD$.

Tirez AD qui rencontre le plan PQ en G , et joignez AC , EG , GF , BD ; les intersections EG , BD , des plans parallèles PQ , RS , par le plan ABD , sont parallèles* ; donc $AE : EB :: AG : GD$; pareillement les intersections AC , GF , étant parallèles , on a $AG : GD :: CF : FD$; donc , à cause du rapport commun , $AG : GD$, on aura $AE : EB :: CF : FD$.

DÉFINITIONS.

On appelle projection d'un point sur un plan , le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan .

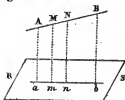


La projection d'une ligne AMB sur un plan, est la ligne amb formée par les projections de tous les points de la ligne AMB .

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

La projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite.



D'un point A de la ligne AB , abaissons la perpendiculaire Aa sur le plan RS , et menons par les droites AB , Aa , un plan qui coupera RS suivant ab .

Si par les points $M, N, \dots$ de la ligne AB on abaisse des perpendiculaires sur le plan RS , elles seront toutes parallèles à Aa , et seront situées dans le plan BAA ; elles ne pourront donc rencontrer le plan RS que sur la ligne ab .

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

L'angle aigu ABa formé par la droite AB avec sa projection Ba sur le plan MN , est moindre que l'angle ABD , que fait la même droite avec toute autre BD , passant par son pied dans le plan.



Prenons $BD = Ba$, et joignons AD ; les deux triangles ABa , ABD , ont le côté AB commun; de plus $Ba = BD$ par construction; mais le troisième côté Aa du premier triangle est plus petit que le troisième

côté AD du second triangle, puisque Aa est perpendiculaire au plan MN, et que AD est une oblique; donc l'angle ABa est moindre que l'angle ABD.

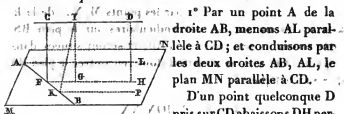
Scolie I. L'angle aigu que fait une droite avec sa projection sur un plan, étant l'angle minimum, l'angle obtus est maximum.

Scolie II. L'angle aigu que fait une droite avec sa projection sur un plan, en raison de la propriété qui vient d'être démontrée, est appelé *angle de la droite avec le plan*.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Etant données deux droites AB, CD non situées dans un même plan; 1° on peut leur mener une perpendiculaire commune; 2° on n'en peut mener qu'une; 3° elle est la plus courte distance des deux droites.



1° Par un point A de la droite AB, menons AL parallèle à CD; et conduisons par les deux droites AB, AL, le plan MN parallèle à CD. D'un point quelconque D pris sur CD abaissons DH perpendiculaire au plan MN, et par le point H menons HF parallèle à CD; enfin par le point F tirons FC parallèle à DH; FC sera une perpendiculaire commune aux deux droites.

Car FC, étant parallèle à DH, est perpendiculaire au plan MN; elle est donc perpendiculaire sur AB et sur FH; elle l'est donc aussi sur CD parallèle à FH.

2° FC est la seule perpendiculaire commune; car, si l'on supposait qu'une autre droite IK, fût perpendiculaire sur AB et sur CD, elle serait aussi perpendiculaire sur la droite KP parallèle à CD; donc elle serait perpendiculaire au plan

MN ; d'ailleurs la ligne IG, parallèle à DH, est perpendiculaire au même plan ; on pourrait donc d'un point abaisser deux perpendiculaires sur un plan.

3° FC est la plus courte distance des deux droites ; car soit IK une autre droite qui rencontre AB et CD ; si l'on mène IG parallèle à DH, IG sera perpendiculaire à MN, et sera plus petit que IK ; or $IG = FC$; donc on a $FC < IK$.

ANGLES FORMÉS PAR LES PLANS.

DÉFINITIONS.

I. Lorsque deux plans se rencontrent, la figure que forment ces plans terminés à leur intersection commune s'appelle *angle dièdre*.

L'intersection des deux plans se nomme l'*arête* de l'angle dièdre ; les deux plans qui le forment en sont les faces.

On désigne un angle dièdre au moyen de quatre lettres ; deux d'entre elles servent à désigner l'arête, et les deux autres représentent les deux faces. On a soin de mettre au milieu les deux lettres qui désignent l'arête.

II. Deux angles dièdres sont dits égaux, lorsqu'on peut faire coïncider leurs faces.



III. L'angle NAP, formé par les perpendiculaires NA, AP, menées dans les deux faces de l'angle dièdre PMAN, en un même point de l'arête MA, est l'*angle plan* correspondant à l'angle dièdre.

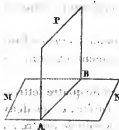
L'angle plan, ainsi formé, est le même en tous les points de l'arête ; car, si au point M on forme de même l'angle plan CMB, les droites MC, AN, seront parallèles comme étant situées dans un même plan, et de plus perpendiculaires à MA ; de même MB est parallèle à AP ; donc $CMB = NAP$.



Lorsqu'un plan PB en rencontre un autre MN, il forme avec celui-ci deux angles dièdres adjacents PABM, PABN. Si ces angles adjacents sont égaux, le plan PB est dit perpendiculaire sur MN; et les angles dièdres égaux s'appellent angles dièdres *droits*. (Il sera démontré que tous les angles dièdres droits sont égaux.)

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.



Par une droite AB située dans le plan MN on peut mener un plan perpendiculaire à MN, et on n'en peut mener qu'un seul.

Corollaire. Tous les angles dièdres droits sont égaux. }

La démonstration de ce théorème et du corollaire étant tout à fait semblable à celle qui a été donnée (liv. 1^{er}, pr. 1), nous laissons au lecteur le soin de la donner lui-même.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

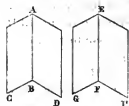
Tout plan qui en rencontre un autre forme avec lui deux angles dièdres adjacents dont la somme vaut deux angles dièdres droits.

Corollaire. Si un plan est perpendiculaire sur un autre, ce second plan est perpendiculaire sur le premier. (Voyez liv. 1^{er}, pr. 3.)

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Si deux angles dièdres CABD, GEFH sont égaux, leurs angles plans CBD, GFH seront égaux.



En effet, portons le second dièdre sur le premier, de manière que EF tombe sur AB, le point F en B, et que le plan EFG s'applique sur le plan ABC; les angles EFG, ABC étant droits, FG prendra la direction BC; maintenant, à cause de

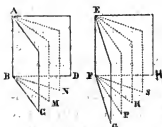
l'égalité des angles dièdres, le plan EFH s'appliquera sur ABD, et comme les angles EFH, ABD, sont droits, FH coïncidera avec BD.

Corollaire. L'angle dièdre droit a pour angle plan un angle droit.

Car, quand un plan est perpendiculaire sur un autre, les angles dièdres adjacents sont égaux; les angles plans qui leur correspondent sont donc aussi égaux; or ceux-ci sont adjacents, donc ils sont droits.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.



Deux angles dièdres CABD, GEFH, sont entre eux dans le même rapport que leurs angles plans CBD, GFH.

Supposons que les deux angles dièdres aient une commune mesure, et qu'en divisant CABD en trois parties égales, GEFH renferme 4 de ces parties, on aura

$$CABD : GEFH :: 3 : 4.$$

Menons les plans CBD, GFH, respectivement perpendiculaires aux arêtes AB, EF; ces plans couperont les faces de divisions suivant des droites BC, BM, ... FG, FP, FR... respectivement perpendiculaires sur AB et sur EF; or les angles plans CBM, MBN... GFP, PFR... sont égaux comme correspondants à des dièdres égaux; d'ailleurs CBD contient trois de ces angles, et GFH en contient 4; on a donc aussi: $CBD : GFH :: 3 : 4$; donc enfin: $CABD : GEFH :: CBD : GFH$.

Si les deux angles dièdres n'avaient pas de commune mesure, on ferait voir, par le raisonnement connu, que la proportion subsiste encore.

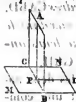
Scolie. Il résulte de ce théorème, que si l'on veut mesurer un angle dièdre D, c'est-à-dire trouver le rapport de D à un angle dièdre pris pour unité (l'angle dièdre droit, par exemple), il suffira de chercher le rapport de l'angle plan de D à un angle droit.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

La ligne AP étant perpendiculaire au plan MN, tout plan APB, conduit suivant AP, sera perpendiculaire au plan MN.

Soit BC l'intersection des plans AB, MN; si dans le plan MN on mène PD perpendiculaire à BP, la ligne AP, étant perpendiculaire au plan MN, sera perpendiculaire à chacune des deux droites BC, PD : mais l'angle APD, formé par les deux perpendiculaires PA, PD, à l'intersection commune BP, mesure l'angle des deux plans AB, MN; donc, puisque cet angle est droit, les deux plans sont perpendiculaires entre eux.



Scolie. Lorsque trois droites, telles que AP, BP, DP, sont perpendiculaires entre elles, chacune de ces droites est perpendiculaire au plan des deux autres et les trois plans sont perpendiculaires entre eux.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Si le plan AB est perpendiculaire au plan MN, et que dans le plan AB on mène la ligne PA perpendiculaire à l'intersection commune PB, je dis que PA sera perpendiculaire au plan MN.



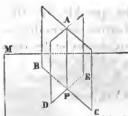
Car, si dans le plan MN on mène PD perpendiculaire à PB, l'angle APD sera droit, puisque les plans sont perpendiculaires entre eux; donc la ligne AP est perpendiculaire aux deux droites PB, PD; donc elle est perpendiculaire à leur plan MN.

Corollaire. Si le plan AB est perpendiculaire au plan MN, et que par un point A du plan AB on abaisse une perpendiculaire sur le plan MN, je dis que cette perpendiculaire sera dans le plan AB, car, si elle n'y était pas, on pourrait mener dans le plan AB une perpendiculaire AP à l'intersection commune BP, laquelle serait en même temps perpendiculaire au plan MN; donc du même point A on pourrait abaisser deux perpendiculaires au plan MN, ce qui est impossible.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

Si deux plans AB, AD, sont perpendiculaires à un troisième MN, leur intersection commune AP sera perpendiculaire à ce troisième plan.



Car, si d'un point A pris sur l'intersection on abaisse une perpendiculaire sur le plan MN , cette perpendiculaire doit se trouver à la fois dans le plan AB et dans le plan AD ; donc elle est leur intersection commune AP .

DÉFINITIONS.

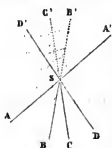
I. On appelle *angle solide* ou *polyèdre*, la figure formée par plusieurs plans qui se coupent en un même point.

II. Les intersections des plans sont les arêtes de l'angle solide; le point de concours des arêtes en est le *sommet*.

Les angles formés par les arêtes sont appelés les *faces* ou les angles plans de l'angle solide.

III. Lorsque le nombre des plans est égal à trois, l'angle solide s'appelle *angle trièdre*.

IV. Nous ne considérerons que des angles solides convexes, c'est-à-dire, qui sont situés entièrement d'un même côté d'une de leurs faces prolongées.



V. Un angle solide $SABCD$ étant donné, si l'on prolonge les arêtes SA , SB ..., au delà du point S , on forme un nouvel angle solide $S'A'B'C'D'$ qui est dit *symétrique* du premier.

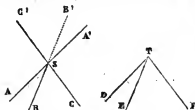
Il est évident que ce nouvel angle solide a les mêmes angles plans et les mêmes angles dièdres que le premier.

Néanmoins ces deux angles solides ne pourront pas en général être superposés; car, si l'on fait coïncider la face $D'S'A'$ sur son égale ASD de manière que les arêtes des deux angles solides soient situées d'un même côté de la face commune, on voit qu'en partant de l'arête SD , et faisant le tour des deux angles solides, les angles plans et les angles dièdres se présenteront dans un ordre inverse.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

Deux angles trièdres sont égaux dans toutes leurs parties, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune.



Soit $ASB = DTE$, $BSC = ETF$, et l'angle dièdre SB égal à l'angle dièdre TE .

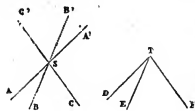
Faisons coïncider l'angle ASB sur son égal DTE : à cause de l'égalité des angles dièdres SB , TE , le plan ETF s'appliquera sur le plan BSC , et, comme les angles ETF , BSC , sont égaux, l'arête TF prendra la direction SC ; les deux angles trièdres coïncideront donc et auront toutes leurs parties égales.

Si les faces égales des deux angles trièdres étaient inversement disposées par rapport aux angles dièdres égaux, on superposerait l'angle trièdre T sur le symétrique de $SABC$, et on serait conduit à la même conclusion.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

Deux angles trièdres sont égaux dans toutes leurs parties lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun.



Soit $ASC = DTF$, l'angle dièdre $SA = TD$, et l'angle dièdre $SC = TF$.

Faisons coïncider la face DTF sur son égale ASC ; à cause de l'égalité des angles dièdres SA et

TD, SC et TF, les plans DTE, FTE, s'appliquent respectivement sur les faces ASB, CSB; donc l'arête TE coïncidera avec SB, et les deux angles trièdres coïncidant auront toutes leurs parties égales.

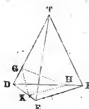
Si les angles dièdres égaux étaient inversement placés par rapport aux faces égales, on superposerait l'angle trièdre T sur le symétrique de l'angle trièdre S, et on arriverait ainsi au même résultat.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

Si deux angles trièdres ont les faces égales chacune à chacune, les angles dièdres opposés aux faces égales seront égaux entre eux.

Soit: $ASB = DTE$, $ASC = DTF$, $BSC = ETF$.



Prenons les six longueurs égales SA, SB, SC, TD, TE, TF; et tirons les lignes AB, AC, BC, DE, DF, EF. Les triangles isocèles SAB, DTE, sont égaux comme ayant un

angle égal compris entre côtés égaux; il en sera de même des triangles SBC, TEF, et aussi des triangles SAC, TDF. Enfin, de l'égalité de ces triangles résulte celle des triangles ABC, DEF, car ils sont équilatéraux entre eux.

Cela posé, par un point M de l'arête SA, menons dans les faces SAB, SAC, les droites MN, MP, perpendiculaires sur SA; ces droites rencontreront les côtés AB et AC, puisque les triangles SAB, SAC, étant isocèles, les angles à la base SAB, SAC, sont aigus; enfin, tirons la droite NP.

Maintenant prenons $DG = AM$, et répétons dans le second trièdre la construction précédente.

Les triangles rectangles AMN, DGK, sont égaux comme ayant le côté $AM = DG$ et l'angle aigu $MAN = GDK$; on en conclut $AN = DK$ et $MN = GK$. On verrait de même que $MP = GH$ et $AP = DH$.

On reconnaît aussi que les triangles PAN, HDK, sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux; d'où l'on conclut $NP = KH$. Donc enfin, les triangles NMP, KGH, ont les trois côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle NMP, qui mesure le dièdre SA, est égal à l'angle KGH, qui mesure le dièdre TD.

Scolie. Si les deux angles solides ont, en outre, leurs faces semblablement disposées, ils seront égaux par superposition; dans le cas contraire, ils seront symétriques.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

Lorsque par un point F pris sur l'arête d'un angle dièdre AB, on élève sur la face AC une perpendiculaire FG, du même côté du plan ABC que la face ABD, et sur la face ABD une perpendiculaire DE, du même côté du plan ABD que la face ABC, l'angle EFG est le supplément de l'angle plan qui mesure l'angle dièdre.

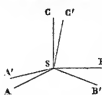


En effet, les deux droites EF, FG, perpendiculaires à AB, déterminent un plan perpendiculaire à AB, qui coupe les deux faces de l'angle dièdre suivant les droites FI, FH également perpendiculaires à AB; et l'angle IFH mesure l'angle dièdre. Or, FG étant perpendiculaire au plan ABC, on a $GFI = 1^{\text{re}}$; on a par la même raison $EFH = 1^{\text{re}}$, d'où en ajoutant $GFI + EFH = 2^{\text{de}}$, ou $EFG + IFH = 2^{\text{de}}$.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÈME.

Lorsqu'au sommet d'un angle trièdre $SABC$, on élève sur chaque face une perpendiculaire, du même côté du plan de cette face que la troisième arête, l'angle trièdre qui a pour arêtes ces trois perpendiculaires, et l'angle trièdre donné sont supplémentaires. (Deux angles trièdres sont dits supplémentaires, lorsque les angles plans de l'un sont les suppléments des angles qui mesurent les angles dièdres de l'autre.)



Soit SC' perpendiculaire sur la face ASB , et du même côté du plan ASB que l'arête SC ; la droite SB' , perpendiculaire sur la face ASC , et du même côté du plan ASC que l'arête SB ; enfin soit la droite SA' perpendiculaire au plan CSB , et du même côté de ce plan que l'arête SA .

1° La droite SC' est perpendiculaire sur le plan ASB , et est du même côté de ce plan que la face CSB ; la droite SA' est perpendiculaire sur le plan CSB , et est située du même côté de ce plan que la face ASB : donc* l'angle $C'SA'$ est le supplément de l'angle correspondant à l'angle dièdre SB . On verrait de même que l'angle $C'SB'$ est le supplément de l'angle qui correspond à l'angle dièdre SA , et que l'angle $A'SB'$ est le supplément de l'angle qui mesure l'angle dièdre SC . Donc, 1° les angles plans de $SA'B'C'$ sont les suppléments des angles dièdres de $SABC$.

2° La droite SA' , étant perpendiculaire sur le plan CSB , est perpendiculaire sur SC ; la droite SB' , perpendiculaire au plan CSA , est perpendiculaire à SC ; donc la droite SC est perpendiculaire au plan $A'SB'$; de plus, SC' étant perpendiculaire au plan ASB , et étant du même côté de ce

plan que SC , l'angle CSC' est aigu ; et puisque SC est perpendiculaire à $A'SB'$, et forme avec SC' un angle aigu, on en conclut que SC est du même côté du plan $A'SB'$ que SC' .

On verrait semblablement que SB est perpendiculaire au plan $A'SC'$, et est du même côté de ce plan que SB' , et que SA est perpendiculaire au plan $C'SB'$, et est du même côté de ce plan que SA' ; qu'en un mot l'angle $SABC$ est construit avec $SA'B'C'$, comme cet angle trièdre a été construit au moyen de $SABC$. Donc les angles plans de $SABC$ sont les suppléments des angles dièdres de $SA'B'C'$.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÈME.

Si deux angles trièdres ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun, ils ont aussi leurs faces égales.

Soient S et S' les deux angles trièdres donnés ; T et T' leurs angles trièdres supplémentaires.

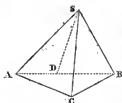
Puisque S et S' ont leurs angles dièdres égaux, les angles trièdres T et T' auront leurs faces égales chacune à chacune, et par suite leurs angles dièdres égaux. Enfin, les angles trièdres T et T' ayant leurs angles dièdres égaux, les angles trièdres S et S' auront leurs faces égales.

Scolie. Si les faces égales des deux angles trièdres sont semblablement disposées, les angles trièdres seront égaux par superposition ; autrement, ils seront symétriques.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

Si un angle solide est formé par trois angles plans, la somme de deux quelconques de ces angles sera plus grande que le troisième.



Il n'y a lieu à démontrer la proposition que lorsque l'angle plan qu'on compare à la somme des deux autres est plus grand que chacun de ceux-ci. Soit donc l'angle solide S formé par trois angles plans ASB , ASC , BSC , et supposons que l'angle ASB soit le plus grand des trois ; je dis qu'on aura $ASB < ASC + BSC$.

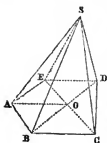
Dans le plan ASB faites l'angle $BSD = BSC$, tirez à volonté la droite AD ; et, ayant pris $SC = SD$, joignez AC , BC .

Les deux côtés BS , SD , sont égaux aux deux BS , SC , l'angle $BSD = BSC$; donc les deux triangles BSD , BSC , sont égaux ; donc $BD = BC$. Mais on a $AB < AC + BC$; retranchant d'un côté BD , et de l'autre son égale BC , il restera $AD < AC$. Les deux côtés AS , SD , sont égaux aux deux AS , SC , le troisième AD est plus petit que le troisième AC ; donc l'angle $ASD < ASC$. Ajoutant $BSD = BSC$, on aura $ASD + BSD$ ou $ASB < ASC + BSC$.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÈME.

La somme des angles plans qui forment un angle solide convexe est toujours moindre que quatre angles droits.



Coupez l'angle solide S par un plan $ABCDE$ qui rencontre toutes les arêtes ; d'un point O pris dans ce plan, menez à tous les angles les lignes OA , OB , OC , OD , OE .

La somme des angles des triangles ASB , BSC , etc., formés autour du sommet S , équivaut à la somme des angles d'un pareil nombre de triangles AOB ,

BOC, etc., formés autour du sommet O. Mais au point B les angles ABO, OBC, pris ensemble, font l'angle ABC plus petit que la somme des angles ABS, SBC* ; de même au point C * 35. on a BCO + OCD < BCS + SCD ; et ainsi à tous les angles du polygone ABCDE. Il suit de là que dans les triangles dont le sommet est en O, la somme des angles à la base est moindre que la somme des angles à la base dans les triangles dont le sommet est en S ; donc, par compensation, la somme des angles formés autour du point O est plus grande que la somme des angles autour du point S. Mais la somme des angles autour du point O est égale à quatre angles droits ; donc la somme des angles plans qui forment l'angle solide S est moindre que quatre angles droits.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÈME.

1° Dans tout angle trièdre, la somme des trois angles dièdres est comprise entre 2 droits et 6 droits ; 2° le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres.

1° Soient a, b, c , les trois angles dièdres de l'angle trièdre donné, et A, B, C , les faces de l'angle trièdre supplémentaire.

On a : $a = 2^d - A$, $b = 2^d - B$, $c = 2^d - C$;

d'où, en ajoutant

$$a + b + c = 6^d - (A + B + C).$$

D'ailleurs la somme $A + B + C$ est plus grande que zéro, et moindre que 4^d ; donc la somme $a + b + c$ est moindre que 6 droits, et plus grande que 2 droits.

2° a, b, c , étant les angles dièdres de l'angle trièdre donné, et a le plus petit ; $2^d - a$, $2^d - b$, $2^d - c$ seront les faces de l'angle trièdre supplémentaire, et $2^d - a$ la plus grande ; on aura donc, en vertu du théorème 35,

$$2^d - a < 2^d - b + 2^d - c ;$$

II.

d'où en ajoutant de part et d'autre $b + c + a$, et retranchant 2^{de}

$$b + c < 2^{\text{de}} + a.$$

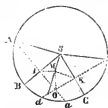
PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÈME.

Pour qu'on puisse former un angle solide trièdre avec trois faces données, il faut et il suffit que la somme des trois faces soit moindre que 4 droits, et que la plus grande soit plus petite que la somme des deux autres.

Nous avons déjà reconnu que ces conditions sont nécessaires; il reste donc à démontrer qu'elles sont suffisantes.

Soient BSC, ASB, DSC, les trois faces données que nous supposons placées dans un même plan, et soit BSC la plus grande.



Du point S comme centre avec un rayon arbitraire SA, décrivons une circonférence, et abaissons des points A et D les droites Aa, Dd perpendiculaires sur SB et sur SC.

L'angle BSC étant le plus grand des trois, BC sera plus grand que chacun des arcs BA, CD, et comme Ba = BA, on voit que le point a est entre B et C, et il en est de même de d.

De plus, on a par hypothèse $BSC < ASB + CSD$,
et par suite $BC < AB + CD$.

Donc, puisque Ba = BA et Cd = CD, le point a est sur l'arc BC à la droite de d.

Enfin la somme des trois faces données étant moindre que 4 droits, le point D sera placé après le point C, sur la circonférence parcourue à partir du point A, dans le sens ABC.

Le point d sera donc situé entre A et a, et le point a

entre d et D ; donc les cordes Aa , Dd , se couperont dans l'intérieur de la circonférence.

Cela posé, élevons au point O une perpendiculaire OM au plan BSC , et dans le plan IOM , décrivons du point I comme centre avec AI comme rayon, une circonférence qui coupera OM en un point M , et joignons MS ; l'angle trièdre $SBMC$ sera formé avec les trois faces données.

En effet, joignons MI et MK ; les triangles ASI , MIS , sont rectangles en I ; ils ont SI commun, et $AI = IM$, donc ils sont égaux ; et l'on a l'angle $ASI = ISM$. De même les triangles rectangles MSK , DSK sont égaux ; car le côté SK est commun, et les côtés SD , SM , égaux tous deux à SA , sont égaux entre eux ; donc l'angle $MSK = DSK$.

Scolie. Pour former un angle trièdre avec trois angles dièdres donnés a , b , c , il faut et il suffit que leur somme soit comprise entre 2 droits et 6 droits, et que le plus petit, augmenté de 2 droits, soit plus grand que la somme des deux autres.

On sait déjà que ces conditions sont nécessaires, et de plus elles sont suffisantes ; car on peut facilement reconnaître que, quand ces conditions sont remplies, on peut construire l'angle trièdre supplémentaire avec les faces $2^d - a$, $2^d - b$, $2^d - c$; donc, on peut aussi construire un angle trièdre avec les angles dièdres a , b , c .

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.

I. On appelle *solide polyèdre*, ou simplement *polyèdre*, tout solide terminé par des plans ou des faces planes. (Ces plans sont nécessairement terminés eux-mêmes par des lignes droites.) On appelle en particulier *tétraèdre* le solide qui a quatre faces; *hexaèdre* celui qui en a six; *octaèdre* celui qui en a huit; *dodécaèdre* celui qui en a douze; *icosaèdre* celui qui en a vingt, etc.

Le tétraèdre est le plus simple des polyèdres; car il faut au moins trois plans pour former un angle solide, et ces trois plans laissent un vide qui, pour être fermé, exige au moins un quatrième plan.

II. L'intersection commune de deux faces adjacentes d'un polyèdre s'appelle *côté* ou *arête* du polyèdre.

III. On appelle *polyèdre régulier* celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles solides sont égaux entre eux. Ces polyèdres sont au nombre de cinq. (*Voyez l'appendice aux livres VI et VII.*)

IV. Le *prisme* est un solide compris sous plusieurs plans parallélogrammes, terminés de part et d'autre par deux plans polygones égaux et parallèles.



Pour construire ce solide, soit ABCDE un polygone quelconque, et MN un plan parallèle à ABCDE. Par le point A, menons la droite AF qui rencontre le plan MN en F, puis par les points B, C, D, E, menons des parallèles à AF, jusqu'à la rencontre du même plan MN.

Enfin joignons les points de rencontre par les droites FG, GH, HI..... Je dis que le solide compris entre les deux polygones ABCDE, FGHIK est un prisme. En effet AF, EG, sont égales et parallèles, d'où il suit que AEGF est un parallélogramme. Par la même raison, toutes les autres faces latérales sont des parallélogrammes. Quant aux deux polygones ABCDE, FGHIK, ils ont leurs côtés égaux et parallèles, ils sont donc égaux.

V. Les polygones égaux et parallèles ABCDE, FGHIK, s'appellent les *bases du prisme*; les autres plans parallélogrammes pris ensemble constituent la *surface latérale* ou *convexe du prisme*. Les droites égales AF, BK, CI, etc., s'appellent les *côtés* du prisme.

VI. La *hauteur d'un prisme* est la distance de ses deux bases, ou la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure sur le plan de la base inférieure.

VII. Un *prisme est droit* lorsque les côtés AF, BK, etc., sont perpendiculaires aux plans des bases: alors chacun d'eux est égal à la hauteur du prisme. Dans tout autre cas le prisme est *oblique*, et la hauteur est plus petite que le côté.

VIII. Un *prisme est triangulaire, quadrangulaire, pentagonal, hexagonal*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc.



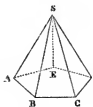
IX. Le prisme qui a pour base un parallélogramme a toutes ses faces parallélogrammiques; il s'appelle *parallélipède*.

Le *parallélipède est droit*, lorsque les arêtes sont perpendiculaires sur la base.

Si, en outre, la base est un rectangle, le parallépipède est *rectangle*; et l'on voit que, dans ce cas, toutes les faces sont des rectangles.



X. Parmi les parallépipèdes rectangles, on distingue le *cube* ou *hexaèdre régulier*, compris sous six carrés égaux.



XI. La *pyramide* est le solide formé en joignant un même point S à tous les sommets d'un polygone plan ABCDE.

Le polygone ABCDE s'appelle la *base* de la pyramide, le point S en est le *sommet*, et l'ensemble des triangles ASB, BSC, etc., forme la *surface convexe* ou la *térale* de la pyramide.

XII. La *hauteur* de la pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base, prolongé, s'il est nécessaire.

XIII. La pyramide est *triangulaire*, *quadrangulaire*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, etc.

XIV. Une pyramide est *régulière*, lorsque la base est un polygone régulier, et qu'en même temps la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base passe par le centre de cette base : cette ligne s'appelle alors l'*axe* de la pyramide.

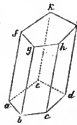
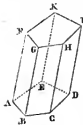
XV. La *diagonale* d'un polyèdre est la droite qui joint les sommets de deux angles solides non adjacents.

Les polyèdres que nous considérerons sont tels que le plan prolongé d'une face quelconque laisse tout le solide d'un même côté; les surfaces de ces polyèdres sont dites *convexes*, et ces polyèdres eux-mêmes s'appellent *polyèdres convexes*.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle solide compris entre trois plans égaux chacun à chacun, et semblablement placés.



Soit la base $ABCDE$ égale à la base $abcde$, le parallélogramme $ABGF$ égal au parallélogramme $abgf$, et le parallélogramme $BCHG$ égal au parallélogramme $bchg$; je dis que le prisme $ABCI$ sera égal au prisme $abci$.

Car, soit posée la base $ABCDE$ sur son égale $abcde$, ces deux bases coïncideront : mais les trois angles plans qui forment l'angle solide B sont égaux aux trois angles plans qui forment l'angle solide b , chacun à chacun, savoir, $ABC = abc$, $ABG = abg$, et $GBC = gbc$; de plus, ces angles sont semblablement placés; donc les angles solides B et b sont égaux, et par conséquent le côté BG tombera sur son égal bg . On voit aussi que, à cause des parallélogrammes égaux $ABGF$ et $abgf$, le côté GF tombera sur son égal gf , et semblablement GH sur gh ; donc la base supérieure $FGHIK$ coïncidera entièrement avec son égale $fghik$, et les deux solides seront confondus en un seul.

Corollaire. Deux prismes droits qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont égaux. Car, ayant le côté AB égal à ab , et la hauteur BG égale à bg , le rectangle $ABGF$ sera égal au rectangle $abgf$; il en sera de même des rectangles $BGHC$, $bghe$; ainsi les trois plans qui forment l'angle solide B sont égaux aux trois qui forment l'angle solide b . Donc les deux prismes sont égaux.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Dans tout parallépipède, les plans opposés sont égaux et parallèles.



Suivant la définition de ce solide, les bases $ABCD$, $EFGH$, sont des parallélogrammes égaux, et leurs côtés sont parallèles : il reste donc à démontrer que la même chose a lieu pour deux faces latérales opposées, telles que $AEHD$, $BFGC$. Or AD est égale et parallèle à BC , puisque la figure $ABCD$ est un parallélogramme; par une raison semblable, AE est égale et parallèle à BF ; donc l'angle DAE est égal à l'angle CBF *, et le plan DAE parallèle à CBF ; donc aussi le parallélogramme $DAEH$ est égal au parallélogramme $CBFG$. On démontrera de même que les parallélogrammes opposés $ABFE$, $DCGH$, sont égaux et parallèles.

Corollaire. Puisque le parallépipède est un solide compris sous six plans dont les opposés sont égaux et parallèles, il s'ensuit qu'une face quelconque et son opposée peuvent être prises pour les bases du parallépipède.

Scolie. Étant données trois droites, AB , AE , AD , passant par un même point A , et faisant entre elles des angles donnés, on peut sur ces trois droites construire un parallépipède; il faut pour cela mener par l'extrémité de chaque droite un plan parallèle au plan des deux autres; savoir, par le point B un plan parallèle à DAE , par le point D un plan parallèle à BAE , et par le point E un plan parallèle à BAD . Les rencontres mutuelles de ces plans formeront le parallépipède demandé.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Dans tout parallépipède, les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.

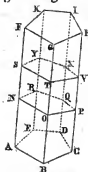


En effet, imaginons deux diagonales EC, AG, menées l'une et l'autre par des sommets opposés; puisque AE est égale et parallèle à CG, la figure AEGC est un parallélogramme; donc les diagonales EC, AG, se couperont mutuellement en deux parties égales. On démontrera de même que la diagonale EC et une autre DF se couperont aussi en deux parties égales; donc les quatre diagonales se couperont mutuellement en deux parties égales, en un même point qu'on peut regarder comme le centre du parallépipède.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Dans tout prisme ABCI, les sections NOPQR, STVXY, faites par des plans parallèles, sont des polygones égaux.



Car les côtés NO, ST, sont parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan ABGF; ces mêmes côtés NO, ST, sont compris entre les parallèles NS, OT, qui sont des côtés du prisme; donc NO est égal à ST. Par une semblable raison, les côtés OP, PQ, QR, etc., de la section NOPQR, sont égaux respectivement aux côtés TV, VX, XY, etc., de la section STVXY. D'ailleurs les côtés égaux étant en même temps parallèles, il s'en-

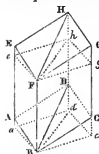
suit que les angles NOP , OPQ , etc., de la première section, sont égaux respectivement aux angles STV , TVX , etc., de la seconde. Donc les deux sections $NOPQR$, $STVXY$, sont des polygones égaux.

Corollaire. Toute section faite dans un prisme parallèlement à sa base, est égale à cette base.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Le plan qui passe par deux arêtes opposées FB , DH , du parallélépipède AG , décompose ce parallélépipède en deux prismes triangulaires équivalents.



Par les sommets B et F menez perpendiculairement au côté BF , les plans $Badc$, $Fegh$, qui rencontreront d'une part en a , d , c , de l'autre en e , h , g , les trois autres côtés AE , DH , CG , du même parallélépipède; les sections $Badc$, $Fegh$, seront des parallélogrammes égaux. Ces sections sont égales, parce qu'elles sont faites par des plans perpendiculaires

* 4. à une même droite, et par conséquent parallèles *; elles sont des parallélogrammes, parce que deux côtés opposés d'une même section aB , dc , sont les intersections de deux plans parallèles $ABFE$, $DCGH$, par un même plan.

Par une raison semblable, la figure $BaeF$ est un parallélogramme, ainsi que les autres faces latérales $BFgc$, $cdhg$,
* déf. 4. $adhe$, du solide $BadcFegh$; donc ce solide est un prisme *; et ce prisme est droit, puisque le côté BF est perpendiculaire au plan de la base.

Cela posé, si par le plan $BFHD$ on divise le prisme droit Bh en deux prismes triangulaires droits $aBdeFh$, $BdcFhg$; je dis que le prisme triangulaire oblique $ABDEFH$ sera équivalent au prisme triangulaire droit $aBdeFh$.

En effet, ces deux prismes ayant une partie commune $ABDheF$, il suffira de prouver que les parties restantes, savoir, les solides $BaADD$, $FeEHh$, sont équivalents entre eux.

Or, à cause des parallélogrammes $ABFE$, $aBFe$, les côtés AE , ae , égaux à leur parallèle BF , sont égaux entre eux; ainsi, en ôtant la partie commune Ae , il restera $Aa = Ee$. On prouvera de même que $Dd = Hh$.

Maintenant, pour opérer la superposition des deux solides $BaADD$, $FeEHh$, plaçons la base Feh sur son égale Bad ; alors le point e tombant en a , et le point h en d , les côtés eE , hH , tomberont sur leurs égaux aA , dD , puisqu'ils sont perpendiculaires au même plan Bad . Donc les deux solides dont il s'agit coïncideront entièrement l'un avec l'autre; donc le prisme oblique $BADFEH$ est équivalent au prisme droit $BadFeh$.

On démontrera semblablement que le prisme oblique $BDCFHG$ est équivalent au prisme droit $BdcFhg$. Mais les deux prismes droits $BadFch$, $BdcFhg$ sont égaux entre eux, puisqu'ils ont même hauteur BF , et que leurs bases Bad , Bdc , sont moitiés d'un même parallélogramme *. Donc les deux prismes triangulaires $BADFEH$, $BDCFHG$, équivalents à des prismes égaux, sont équivalents entre eux.

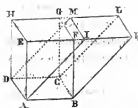
* L.
COR.

Corollaire. Tout prisme triangulaire $ABDHEF$ est la moitié du parallélipède AG , construit sur le même angle solide A , avec les mêmes arêtes AB , AD , AE .

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Si deux parallélipèdes AG , AI , ont une base commune $ABCD$, et que leurs bases supérieures $EFGH$, $IKLM$, soient comprises dans un même plan et entre les mêmes parallèles EK , HL , ces deux parallélipèdes seront équivalents entre eux.



Je dis d'abord que le prisme triangulaire AEIDHM est égal au prisme triangulaire BFKCGL.

En effet, AE est égal à BF comme côtés opposés d'un parallélogramme ; AI est égal à BK par la même raison ; enfin les angles EAI, FBK,

sont égaux comme ayant les côtés parallèles ; donc les triangles EAI, FBK sont égaux. Les parallélogrammes AH, BG sont égaux comme faces opposées d'un parallélépipède ; les parallélogrammes IH, GK, sont égaux, car $EH = FG$, $EI = FK$, et l'angle $HEI = GFK$.

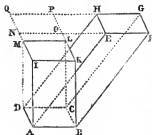
Les trois faces qui aboutissent au point E sont donc égales aux faces qui aboutissent en F ; de plus, les angles solides E, F, ayant les angles plans égaux chacun à chacun et semblablement disposés, sont égaux ; donc * aussi les prismes AEIDHM, BFKCGL, sont égaux.

Mais si du solide AL on retranche le prisme AEM, il restera le parallélépipède AIL ; et si du même solide AL on retranche le prisme BFL, il restera le parallélépipède AEG ; donc les deux parallélépipèdes AIL, AEG, sont équivalents entre eux.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur sont équivalents entre eux.



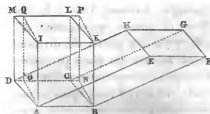
Soit ABCD la base commune aux deux parallélépipèdes AG, AL ; puisqu'ils ont même hauteur, leurs bases supérieures EFGH, IKLM, seront sur le même plan. De plus les côtés EF et AB sont égaux et parallèles, il en est de même de IK et AB ; donc EF est égal et pa-

rallèle à IK : par une raison semblable GF est égal et parallèle à LK. Soient prolongés les côtés EF, HG ainsi que LK, IM, jusqu'à ce que les uns et les autres forment par leurs intersections le parallélogramme NOPQ, il est clair que ce parallélogramme sera égal à chacune des bases EFGH, IKLM. Or, si on imagine un troisième parallépipède qui, avec la même base inférieure ABCD, ait pour base supérieure NOPQ, ce troisième parallépipède serait équivalent au parallépipède AG*, puisque, ayant même base inférieure, les bases supérieures sont comprises dans un même plan et entre les parallèles GQ, FN. Par la même raison, ce troisième parallépipède serait équivalent au parallépipède AL; donc les deux parallépipèdes AG, AL, qui ont même base et même hauteur, sont équivalents entre eux. * 6.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Tout parallépipède peut être changé en un parallépipède rectangle équivalent qui aura même hauteur et une base équivalente.



Soit AG le parallépipède proposé; des points A, B, C, D, menez AI, BK, CL, DM, perpendiculaires au plan de la base, vous formerez ainsi le parallépipède AL équivalent au parallépipède AG, et dont les faces latérales AK, BL, etc., seront des rectangles. Si donc la base ABCD est un rectangle, AL sera le parallépipède rectangle équivalent au parallépipède proposé AG. Mais si ABCD n'est pas un rectangle, menez AO et BN perpendiculaires sur CD, ensuite OQ et NP perpendiculaires sur la base,

vous aurez le solide ABNOIKPQ qui sera un parallépipède rectangle : en effet, par construction, la base ABNO et son opposée IKPQ sont des rectangles ; les faces latérales en sont aussi, puisque les arêtes AI, OQ, etc., sont perpendiculaires au plan de la base ; donc le solide AP est un parallépipède rectangle. Mais les deux parallépipèdes AP, AL, peuvent être censés avoir même base ABKI et même hauteur AO, donc ils sont équivalents ; donc le parallépipède AG, qu'on avait d'abord changé en un parallépipède équivalent à AL, se trouve de nouveau changé en un parallépipède rectangle équivalent à AP, qui a la même hauteur AI, et dont la base ABNO est équivalente à la base ABCD.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Deux parallépipèdes rectangles AG, AL, qui ont la même base ABCD, sont entre eux comme leurs hauteurs AE, AI.



Supposons d'abord que les hauteurs AE, AI, soient entre elles comme deux nombres entiers, par exemple, comme 15 est à 8. On divisera AE en 15 parties égales, dont AI contiendra 8, et par les points de division x, y, z , etc., on mènera des plans parallèles à la base. Ces plans partageront le solide AG

en 15 parallépipèdes partiels qui seront tous égaux entre eux, comme ayant des bases égales et des hauteurs égales ; des bases égales, parce que toute section comme MIKL, faite dans un prisme parallèlement à sa base ABCD, est égale à cette base * ; des hauteurs égales, parce que ces hauteurs sont les divisions mêmes Ax, xy, yz , etc. Or, de ces 15 parallépipèdes égaux, huit sont contenus dans AL ; donc le solide AG est au solide AL comme 15 est à 8,

* 5.

ou en général comme la hauteur AE est à la hauteur AI.

Si les hauteurs AE et AI étaient incommensurables, on prouverait, comme il a été dit (liv. II, pr. 18), que leur rapport serait toujours égal à celui des parallépipèdes.

Remarque. Dans un parallépipède rectangle, si a, b, c sont trois arêtes contiguës, et qu'on prenne l'une d'elles pour la hauteur, les deux autres forment les deux dimensions de la base.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Deux parallépipèdes rectangles P et P' qui ont une dimension commune sont entre eux comme les produits de leurs autres dimensions, ou autrement deux parallépipèdes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Soient a, b, c les trois dimensions du parallépipède P; a, b', c' celles de P'.

Formons un troisième parallépipède rectangle P" dont les dimensions soient a, b, c' .

Les parallépipèdes P et P" ayant deux dimensions communes a et b sont entre eux comme les hauteurs c et c' ; ainsi on a :

$$P : P'' :: c : c'.$$

Par la même raison on a :

$$P'' : P' :: b : b'.$$

Multipliant par ordre, et divisant par P" les deux termes du premier rapport, il vient :

$$P : P' :: b \times c : b' \times c'. \quad (1)$$

On sait d'ailleurs que les bases B, B' des deux parallépipèdes sont entre elles comme les produits $b \times c, b' \times c'$; donc, aussi :

$$P : P' :: B : B'. \quad (2)$$

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Deux parallépipèdes rectangles P et P' sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, ou comme les produits de leurs trois dimensions.

Soient H la hauteur du parallépipède P, a et b les deux dimensions de la base B.

Soient de même H' la hauteur du parallépipède P', a' et b' les deux dimensions de la base B'.

Soit P'' un troisième parallépipède ayant pour hauteur H, et B' pour base.

Les parallépipèdes P et P'' ayant même hauteur, on a d'après le théorème précédent :

$$P : P'' :: B : B'.$$

* 9. Les parallépipèdes P'' et P' ayant même base, on a* :

$$P'' : P' :: H : H'.$$

Multipliant par ordre et divisant les deux termes du premier rapport par P'', il vient :

$$P : P' :: B \times H : B' \times H' \quad (1).$$

On sait d'ailleurs que les bases B et B' sont entre elles comme les produits $a \times b$, $a' \times b'$.

On a donc, $B \times H : B' \times H' :: a \times b \times H : a' \times b' \times H'$; d'où l'on conclut, à cause du rapport commun,

$$P : P' :: a \times b \times H : a' \times b' \times H'. \quad (2)$$

MESURE DU PARALLÉLIPÈDE RECTANGLE.

Mesurer un parallépipède rectangle P, c'est trouver son

rapport à un certain parallépipède rectangle P' pris pour unité.

Or la proportion (2) montre que, pour obtenir ce rapport, il faut évaluer a, b, H, a', b', H' avec une même unité linéaire, et diviser le produit des trois premiers nombres par le produit des trois autres.

Le calcul se simplifie beaucoup en prenant pour unité de volume P' , le cube dont le côté est l'unité linéaire; car alors les nombres qui représentent a', b', H' se réduisent à l'unité, et la proportion (2) devient :

$$P : P' :: a \times b \times H : 1;$$

d'où l'on voit que la mesure du parallépipède rectangle est égale au produit de ses trois dimensions.

Remarquons que le produit $a \times b$ indique combien de fois la base B du parallépipède P contient le carré fait sur l'unité linéaire.

La mesure du parallépipède rectangle est donc aussi égale au produit de sa base par sa hauteur (en prenant pour unité de surface le carré fait sur l'unité de longueur, et pour unité de volume le cube construit sur cette même unité).

Applications. — 1° Soient $a = 2^m, 51$, $b = 3^m, 25$, $H = 2^m, 45$; la mesure du parallépipède sera

$$2,51 \times 3,25 \times 2,45 \text{ ou } 19,985875.$$

Le volume du parallépipède contiendra donc 19 mètres cubes, plus 985875 millionièmes de mètre cube; ou bien 19 mètres cubes, 985 décimètres cubes, 875 centimètres cubes. Car le décimètre cube est la millième partie du mètre cube, et le centimètre cube en est la millionième partie.

2° Soit $B = 25,51$, ^{mètres carrés.} et $H = 12,5$, ^{mètre.}; la mesure du parallépipède sera $25,51 \times 12,5$, ou 318,875; le volume du parallépipède rectangle sera donc ^{mètres cubes.} 318,875.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

La mesure d'un parallépipède, et en général la mesure d'un prisme quelconque, est égale au produit de sa base par sa hauteur.

* 8. Car 1° un parallépipède quelconque est équivalent à un parallépipède rectangle de même hauteur et de base équivalente*. Or la mesure de celui-ci est égale à sa base multipliée par sa hauteur; donc la mesure du premier est pareillement égale au produit de sa base par sa hauteur.

* 5. 2° Tout prisme triangulaire est la moitié du parallépipède construit de manière qu'il ait la même hauteur et une base double*. Or la mesure de celui-ci est égale à sa base multipliée par sa hauteur; donc celle du prisme triangulaire est égale au produit de sa base, moitié de celle du parallépipède, multipliée par sa hauteur.

3° Un prisme quelconque peut être partagé en autant de prismes triangulaires de même hauteur qu'on peut former de triangles dans le polygone qui lui sert de base. Mais la mesure de chaque prisme triangulaire est égale à sa base multipliée par sa hauteur; et puisque la hauteur est la même pour tous, il s'ensuit que la somme de tous les prismes partiels sera égale à la somme de tous les triangles qui leur servent de bases, multipliée par la hauteur commune. Donc la mesure d'un prisme polygonal quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire. Si on compare deux prismes qui ont même hauteur, les produits des bases par les hauteurs seront comme les bases; donc *deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases*; par une raison semblable, *deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs*.

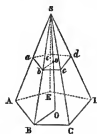
PROPOSITION XIII.

THÉOREME.

Si une pyramide SABCDE est coupée par un plan abd parallèle à sa base,

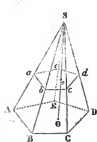
1° *Les côtés $SA, SB, SC, \dots$ et la hauteur SO , seront divisés proportionnellement en $a, b, c, \dots$ et o ;*

2° *La section $abcde$ sera un polygone semblable à la base $ABCDE$.*



Car 1° les plans ABC, abc , étant parallèles, leurs intersections AB, ab , par un troisième plan SAB , seront parallèles* ; * 12, 5. donc les triangles SAB, Sab , sont semblables, et on a la proportion $SA : Sa :: SB : Sb$; on aurait de même $SB : Sb :: SC : Sc$, et ainsi de suite. Donc tous les côtés SA, SB, SC , etc., sont coupés proportionnellement en a, b, c , etc. La hauteur SO est coupée dans la même proportion au point o ; car BO et bo sont parallèles, et ainsi on a $SO : So :: SB : Sb$.

2° Puisque ab est parallèle à AB , bc à BC , cd à CD , etc., l'angle $abc = ABC$, l'angle $bcd = BCD$, et ainsi de suite. De plus, à cause des triangles semblables SAB, Sab , on a $AB : ab :: SB : Sb$; et à cause des triangles semblables SBC, Sbc , on a $SB : Sb :: BC : bc$; donc $AB : ab :: BC : bc$; on aurait de même $BC : bc :: CD : cd$, et ainsi de suite. Donc les polygones $ABCDE, abcde$, ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels ; donc ils sont semblables.



Corollaire. Soient SABCDE, TXYZ, deux pyramides qui ont même hauteur, et dont les bases sont situées dans un même plan : si on coupe ces pyramides par un même plan parallèle au

plan des bases, et qu'il en résulte les sections *abcde*, *xyz*, je dis que les sections *abcde*, *xyz*, seront entre elles comme les bases ABCDE, XYZ.

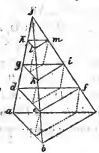
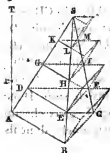
Car les polygones ABCDE, *abcde*, étant semblables, on a $ABCDE : abcde :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$;
 mais $AB : ab :: SB : Sb :: SO : So$,
 donc $ABCDE : abcde :: \overline{SO}^3 : \overline{So}^3$;

on aurait de même $XYZ : xyz :: \overline{SA}^3 : \overline{Sa}^3$;
 d'où l'on conclut $ABCDE : abcde :: XYZ : xyz$. Donc, si les bases sont équivalentes, les sections faites à égale hauteur sont aussi équivalentes.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.



Soient SAB, *sab* les deux pyramides dont les bases ABC, *abc*, que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes et qui ont même hauteur TA ; si ces pyramides ne sont

pas équivalentes, soit *sabc* la plus petite, et soit *Ax* la hauteur d'un prisme qui, étant construit sur la base *ABC*, serait égal à leur différence.

Divisez la hauteur commune *AT* en parties égales plus petites que *Ax*, et soit *k* une de ces parties; par les points de division de la hauteur, faites passer des plans parallèles au plan des bases; les sections faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides, seront équivalentes*, telles que *DEF* et *def*, *GHI* et *ghi*, etc. Cela posé, sur les triangles *ABC*, *DEF*, *GHI*, etc., pris pour bases, construisez des prismes extérieurs qui aient pour arêtes les parties *AD*, *DG*, *GK*, etc., du côté *SA*; de même sur les triangles *def*, *ghi*, *klm*, etc., pris pour bases, construisez dans la seconde pyramide des prismes intérieurs qui aient pour arêtes les parties correspondantes du côté *sa*; tous ces prismes partiels auront pour hauteur commune *k*.

La somme des prismes extérieurs de la pyramide *SABC* est plus grande que cette pyramide; la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* est plus petite que cette pyramide; donc par ces deux raisons la différence entre les deux sommes de prismes devra être plus grande que la différence entre les deux pyramides.

Or à partir des bases *ABC*, *abc*, le second prisme extérieur *DEFG* est équivalent au premier prisme intérieur *defa*, puisque leurs bases *DEF*, *def*, sont équivalentes et qu'ils ont une même hauteur *k*; sont équivalents par la même raison, le troisième prisme extérieur *GHIK* et le second intérieur *ghid*, le quatrième extérieur et le troisième intérieur; ainsi de suite jusqu'au dernier des uns et des autres. Donc tous les prismes extérieurs de la pyramide *SABC*, à l'exception du premier *ABCD*, ont leurs équivalents dans les prismes intérieurs de la pyramide *sabc*. Donc le prisme *ABCD* est la différence entre la somme des prismes extérieurs de la pyramide *SABC* et la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc*; mais la différence

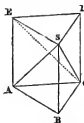
* 13,
cor.

de ces deux sommes est plus grande que la différence des deux pyramides ; donc il faudrait que le prisme $ABCD$ fût plus grand que le prisme $ABCX$; or, au contraire, il est plus petit, puisqu'ils ont une même base ABC , et que la hauteur k du premier est moindre que la hauteur Ax du second. Donc l'hypothèse d'où l'on est parti ne saurait avoir lieu ; donc les deux pyramides $SABC$, $sabc$, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Toute pyramide triangulaire est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.



Soit $SABC$ une pyramide triangulaire, $ABCDES$ un prisme triangulaire de même base et de même hauteur ; je dis que la pyramide est le tiers du prisme.

Retranchez du prisme la pyramide $SABC$, il restera le solide $SACDE$, qu'on peut considérer comme une pyramide quadrangulaire dont le sommet est S , et qui a pour base le parallélogramme $ACDE$; tirez la diagonale CE , et conduisez le plan SCE qui partagera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires $SACE$, $SDCE$. Ces deux pyramides ont pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du sommet S sur le plan $ACDE$; elles ont des bases égales, puisque les triangles ACE , DCE , sont les deux moitiés du même parallélogramme ; donc les deux pyramides $SACE$, $SDCE$, sont équivalentes entre elles ; mais la pyramide $SDCE$ et la pyramide $SABC$ ont des bases égales ABC , DES ; elles ont aussi même hauteur, car cette hauteur est la distance des plans parallèles ABC , DES . Donc les deux pyramides $SABC$, $SDCE$, sont équivalentes ; mais on a démontré que la pyramide $SDCE$ est

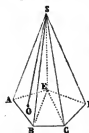
équivalente à la pyramide SACE; donc les trois pyramides SABC, SDCE, SACE, qui composent le prisme ABD sont équivalentes entre elles. Donc la pyramide SABC est le tiers du prisme ABD, qui a même base et même hauteur.

Corollaire. La mesure d'une pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Toute pyramide SABCDE a pour mesure le tiers du produit de sa base ABCDE par sa hauteur SO.



Car, en faisant passer les plans SEB, SEC, par les diagonales EB, EC, on divisera la pyramide polygonale SABCDE en plusieurs pyramides triangulaires qui auront toutes la même hauteur SO. Mais, par le théorème précédent, chacune de ces pyramides se mesure en multipliant chacune des bases ABE, BCE, CDE, par le tiers de sa hauteur SO; donc la somme des pyramides triangulaires, ou la pyramide polygonale SABCDE, aura pour mesure la somme des triangles ABE, BCE, CDE, ou le polygone ABCDE, multiplié par $\frac{1}{3}$ SO; donc toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire I. Toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

Corollaire II. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases, et deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs.

Scolie. On peut évaluer le volume de tout corps polyèdre en le décomposant en pyramides, et cette décomposition peut se faire de plusieurs manières : une des plus simples est de faire passer les plans de division par le

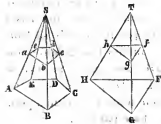
sommet d'un même angle solide; alors on aura autant de pyramides partielles qu'il y a de faces dans le polyèdre, excepté celles qui forment l'angle solide d'où partent les plans de division.

Ces pyramides elles-mêmes pourront être décomposées en tétraèdres, en divisant leurs bases en triangles.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

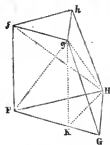
Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base, le tronc qui reste en ôtant la petite pyramide, est égal à la somme de trois pyramides qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et dont les bases seraient la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.



Soit ABCDE une pyramide coupée par le plan abd parallèle à la base; soit TFGH une pyramide triangulaire dont la base et la hauteur soient égales ou équivalentes à celles de la pyramide SABCDE. On peut supposer les deux bases situées

sur un même plan; et alors le plan abd , prolongé, déterminera dans la pyramide triangulaire une section fgh , située à la même hauteur au-dessus du plan commun des bases: d'où il résulte que la section fgh est à la section abd comme la base FGH est à la base ABD*; et puisque les bases sont équivalentes, les sections le seront aussi. Les pyramides $Sabode$, $Tfgh$, sont donc équivalentes, puisqu'elles ont même hauteur et des bases équivalentes. Les pyramides entières SABCDE, TFGH, sont

équivalentes par la même raison; donc les troncs $ABDab'$, $FGHhfg$, sont équivalents, et par conséquent il suffira de démontrer la proposition énoncée, pour le seul cas du tronc de pyramide triangulaire.



Soit $FGHhfg$ un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles; par les trois points F, g, H , conduisez le plan FgH , qui retranchera du tronc la pyramide triangulaire $gFGH$. Cette pyramide a pour base la base inférieure FGH du tronc; elle a aussi pour hauteur la hauteur du tronc, puisque le sommet g est dans le plan de la base supérieure fgh .

Après avoir retranché cette pyramide, il restera la pyramide quadrangulaire $gfhHF$, dont le sommet est g et la base $fghHF$. Par les trois points f, g, H , conduisez le plan fgH , qui partagera la pyramide quadrangulaire en deux triangulaires $gFfH$, $gfhH$. Cette dernière a pour base la base supérieure gfh du tronc, et pour hauteur la hauteur du tronc, puisque son sommet H appartient à la base inférieure: ainsi nous avons déjà deux des trois pyramides qui doivent composer le tronc.

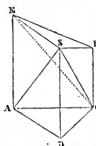
Il reste à considérer la troisième $gFfH$: or, si on mène gK parallèle à fF , et qu'on imagine une nouvelle pyramide $fFHK$, dont le sommet est K , et la base F/H , ces deux pyramides auront même base FfH ; elles auront aussi même hauteur, puisque les sommets g et K sont situés sur une ligne gK parallèle à Ff , et par conséquent parallèle au plan de la base; donc ces pyramides sont équivalentes. Mais la pyramide $fFHK$ peut être considérée comme ayant son sommet en f , et ainsi elle aura même hauteur que le tronc; quant à sa base FKH , je dis qu'elle est moyenne proportionnelle entre les bases FGH, fgh . En effet, les triangles FHK, fgh , ont un angle égal $F=f$, et un côté égal $FK=fg$; on a donc $FHK : fgh :: FH : fh$.

On a aussi $FHG : FHK :: FG : FK$ ou fg . Mais les triangles semblables FGH, fgh , donnent $FG : fg :: FH : fh$; donc $FGH : FHK :: FHK : fgh$; et ainsi la base FHK est moyenne proportionnelle entre les deux bases FGH, fgh . Donc, un tronc de pyramide triangulaire, à bases parallèles, équivaut à trois pyramides qui ont pour hauteur commune la hauteur du tronc, et dont les bases sont la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Si on coupe un prisme triangulaire dont ABC est la base, par un plan DES incliné à cette base, le solide $ABCDES$, qui résulte de cette section, sera égal à la somme des trois pyramides dont les sommets sont D, E, S , et la base commune ABC .



Par les trois points S, A, C , faites passer le plan SAC , qui retranchera du prisme tronqué $ABCDES$ la pyramide triangulaire $SABC$: cette pyramide a pour base ABC et pour sommet le point S .

Après avoir retranché cette pyramide, il restera la pyramide quadrangulaire $SACDE$, dont S est le sommet, et $ACDE$ la base. Par les trois points S, E, C , menez encore un plan SEC , qui divisera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires $SACE, SCDE$.

La pyramide $SAEC$, qui a pour base le triangle AEC et pour sommet le point S , est équivalente à une pyramide $EABC$, qui aurait pour base AEC et pour sommet le point B . Car ces deux pyramides ont même base; elles ont aussi même hauteur, puisque la ligne BS , étant parallèle à cha-

cune des lignes AE, CD, est parallèle à leur plan ACE; donc la pyramide SAEC est équivalente à la pyramide EABC, laquelle peut être considérée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point E.

La troisième pyramide SCDE peut être changée d'abord en ASCD; car ces deux pyramides ont la même base SCD; elles ont aussi la même hauteur, puisque AE est parallèle au plan SCD; donc la pyramide SCDE est équivalente à ASCD. Ensuite la pyramide ASCD peut être changée en ABCD, car ces deux pyramides ont la base commune ACD; elles ont aussi la même hauteur, puisque leurs sommets S et B sont situés sur une parallèle au plan de la base. Donc la pyramide SCDE, équivalente à ASCD, est aussi équivalente à ABCD; or, celle-ci peut être regardée comme ayant pour base ABC, et pour sommet le point D.

Donc enfin le prisme tronqué ABCDES est égal à la somme de trois pyramides qui ont pour base commune ABC, et dont les sommets sont respectivement les points D, E, S.

Corollaire. Si les arêtes AE, BS, CD, sont perpendiculaires au plan de la base, elles seront en même temps les hauteurs des trois pyramides qui composent le prisme tronqué; de sorte que la mesure du prisme tronqué sera exprimée par $\frac{1}{3} ABC \times AE + \frac{1}{3} ABC \times BS + \frac{1}{3} ABC \times CD$, quantité qui se réduit à $\frac{1}{3} ABC \times (AE + BS + CD)$.

DE LA SYMÉTRIE.

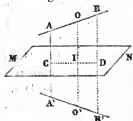
Deux points sont *symétriques* par rapport à un plan, lorsque ce plan est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint ces deux points. — Ce plan est appelé plan de symétrie.

Deux figures sont *symétriques* par rapport à un plan, lorsque chaque point de l'une d'elles a son symétrique sur l'autre figure.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Une ligne droite AB a pour ligne symétrique une autre ligne droite.



Prenons sur la droite donnée deux points A et B, et déterminons leurs symétriques A' et B' en abaissant des points A et B des perpendiculaires sur MN, et prolongeant ces perpendiculaires de longueurs égales à elles-mêmes; tirons A'B' et CD.

Pour démontrer que tout point O de la droite AB a son symétrique sur A'B', abaissons OI perpendiculaire sur MN, et prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre avec A'B'.

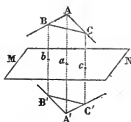
Si nous faisons tourner le quadrilatère ACBD autour de CD pour l'appliquer sur le plan CA'B'D, les angles ACD, A'CD étant droits, CA prendra la direction CA'; et comme $CA = CA'$, le point A' tombera en A. Par la même raison BD s'appliquera sur DB'; de sorte que AB coïncidera avec A'B'. De plus, à cause des angles droits OIC, O'IC, OI prendra la direction IO', et le point O, devant tomber à la fois sur A'B' et sur IO', tombera en O'. On aura donc $OI = IO'$; donc enfin O' est symétrique du point O.

Corollaire. La même démonstration prouve que la ligne AB qui réunit deux points A et B, est égale à la droite A'B' qui joint leurs symétriques.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

L'angle de deux droites AB, AC, est égal à l'angle formé par leurs symétriques A'B', A'C'.



Remarquons d'abord que le point de concours A des deux droites AB, AC, a pour symétrique le point A'; puisque le symétrique du point A doit se trouver à la fois sur A'B' et sur A'C'.

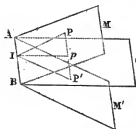
Cela posé, prenons sur AB et AC deux points B et C; soient B' et C' leurs symétriques; et menons BC, B'C'.

Les triangles ABC, A'B'C', sont équilatéraux entre eux*; * 19
donc l'angle $BAC = B'A'C'$. cor.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Un plan a pour surface symétrique un autre plan, et ces deux plans forment des angles égaux avec le plan de symétrie.



Soit AB l'intersection du plan MAB avec le plan de symétrie ABC; et conduisez par AB un plan ABM' qui forme avec le plan de symétrie le même angle que le plan MAB.

Il s'agit de démontrer que tout point P du plan ABM a son symétrique sur ABM'.

Pour cela, abaissez Pp perpendiculaire sur ABC, et prolongez cette ligne jusqu'à sa rencontre P' avec le plan ABM'; puis, menez pI perpendiculaire sur AB, et joignez PI, P'I.

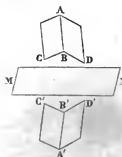
Les deux droites P'I, P'I sont perpendiculaires sur AB, et les angles PIp, P'Ip sont égaux comme mesurant les dièdres égaux MABC, M'ABC. Les triangles rectangles PIp, P'Ip, sont donc égaux comme ayant le côté Ip commun, et un angle aigu égal; donc $Pp = P'p$; donc P' est le symétrique de P.

Remarque. Si le plan dont il s'agit était parallèle au plan de symétrie ABC, il est évident qu'il aurait pour symétrique un autre plan parallèle à ABC, et à la même distance de ce plan.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

L'angle dièdre formé par deux plans ABC, ABD, est égal à l'angle formé par leurs symétriques A'B'C', A'B'D'.



Remarquons d'abord que la droite AB, intersection des deux plans ABC, ABD, a pour symétrique A'B', intersection des plans A'B'C', A'B'D'.

Cela posé, au point B formons l'angle plan CBD qui mesure l'angle dièdre AB.

Formons de même au point B', symétrique* de B, l'angle plan C'B'D' qui mesure l'angle dièdre A'B'.

La droite BD, située dans le plan ABD, aura pour symétrique une droite passant par le point B' et située dans le plan A'B'D'. De plus, comme BD est perpendiculaire sur AB, la droite symétrique de BD sera perpendiculaire sur A'B'*; ce sera donc B'D'. On verra de même que BC' est symétrique de BC; donc l'angle $CBD = C'B'D'$ *.

*20.

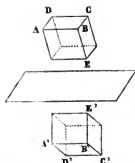
*20.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Deux polyèdres symétriques par rapport à un plan ont 1° leurs faces égales chacune à chacune; 2° leurs

* Liv. 5. angles solides homologues, symétriques*.



1° Soient A, B, C, D, les sommets d'une face de l'un des polyèdres; on sait déjà que leurs symétriques A', B', C', D', sont dans un même plan*. De plus, les polygones ABCD, A'B'C'D' sont égaux, car ils ont les angles égaux et les côtés égaux chacun à chacun*. ^{*19 et 20.}

2° Deux angles solides homologues B et B' ont leurs faces égales*; en outre, leurs angles dièdres sont égaux chacun à chacun*; enfin, si l'on fait coïncider la face A'B'E' sur son égale ABE, de manière que les autres arêtes des deux angles solides tombent d'un même côté de la face commune, on reconnaît que les autres angles plans des deux angles solides sont disposés dans un ordre inverse; donc l'angle solide B' est le symétrique de B. ^{*20. *22.}

Corollaire I. On conclut de là qu'un polyèdre P n'a qu'un seul symétrique. Car soient P' et P'' deux polyèdres symétriques de P construits par rapport à des plans de symétrie différents. Les faces de ces polyèdres sont égales entre elles comme étant respectivement égales aux faces du polyèdre P. De plus, leurs angles solides, étant symétriques des angles solides de P, seront égaux entre eux; donc les polyèdres P' et P'' seront superposables.

Corollaire II. Si l'on décompose un polyèdre P en pyramides triangulaires qui aient toutes pour sommet commun un des sommets du polyèdre; à chacune de ces pyramides correspondra, dans le polyèdre symétrique P', une pyramide symétrique.

On voit donc que deux polyèdres symétriques sont décomposables en un même nombre de tétraèdres symétriques chacun à chacun.

Scolie. Deux polyèdres qui ont leurs faces égales chacune à chacune, et leurs angles solides symétriques, sont

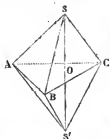
toujours dits symétriques, quelle que soit la position qu'ils aient l'un par rapport à l'autre ; mais il y a lieu de remarquer que la symétrie n'existe plus que quant à la forme des solides.

N. B. Les angles solides homologiques sont ceux dont les sommets sont symétriques.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Deux polyèdres symétriques sont équivalents.



*23,
cor. 1.

En effet, deux polyèdres symétriques pouvant se décomposer en un même nombre de tétraèdres symétriques, il suffit de prouver que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Soit donc $SABC$ un tétraèdre, et construisons son symétrique en prenant pour plan de symétrie l'une des faces ABC^* ; les deux tétraèdres $SABC$, $S'ABC$ sont équivalents, car ils ont même base ABC , et les hauteurs SO , $S'O$, sont égales.



Deux points A et A' sont symétriques par rapport à un troisième point O , appelé centre de symétrie, lorsque la droite qui joint ces deux points est divisée par le point O en deux parties égales.

Deux figures sont symétriques par rapport à un point O , lorsque chaque point de l'une a son symétrique sur l'autre.

On peut établir pour la symétrie par rapport à un point, des théorèmes semblables à ceux qui viennent d'être ex-

posés; nous laissons au lecteur le soin d'en chercher les démonstrations.

DE LA SIMILITUDE.

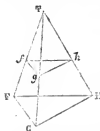
Nous appellerons polyèdres semblables, ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et dont les angles solides homologues sont égaux. (On entend par angles solides homologues ceux qui sont formés par les faces semblables.)

Les droites homologues de deux polyèdres semblables sont celles qui joignent les sommets homologues.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Si l'on divise dans un même rapport aux points f, g, h les arêtes TF, TG, TH du tétraèdre $TFGH$, et qu'on joigne fg, fh, gh , le tétraèdre $Tfgh$ ainsi formé est semblable au premier.



En effet, les triangles Tfg, TFG , sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; par la même raison Tgh est semblable à TGH , et Tfh à TFH . De plus, les droites fg, gh étant parallèles à FG, GH , le plan fgh est parallèle au plan FGH , et le triangle fgh est semblable à FGH *. 13.

Enfin deux angles solides homologues quelconques G, g , sont égaux; car, à cause de la similitude des faces, ils ont leurs angles plans égaux chacun à chacun, et l'on voit en outre que ces angles plans sont semblablement placés. Donc les tétraèdres ont leurs faces semblables et les angles solides homologues égaux, donc ils sont semblables.

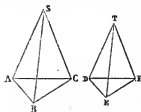
Scolie. On peut remarquer que deux tétraèdres semblables ont toutes leurs arêtes homologues proportionnelles.

Réciproquement deux tétraèdres qui ont leurs arêtes proportionnelles et semblablement placées, sont semblables; car de la proportionnalité des côtés on conclut immédiatement la similitude des faces; et les faces étant semblables et semblablement disposées, les angles solides homologues sont égaux, comme ayant leurs angles plans égaux chacun à chacun et semblablement placés.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

Deux tétraèdres SABC, TDEF, qui ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement placées, sont semblables.



Supposons l'angle dièdre SB égal à l'angle dièdre TE; le triangle SAB semblable à TDE, et SBC semblable à TEF.

Les angles solides S et T sont égaux, comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales et semblablement placées. Donc l'angle ASC est égal à DTF. De plus, à cause de la similitude des triangles ASB et DTE, SBC et TEF, on a

$$SB:TE::AS:DT$$

et $SB:TE::SC:TF;$

d'où $AS:DT::SC:TF.$

Les triangles ASC, DTF sont donc semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

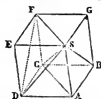
On verrait de la même manière que les angles solides B et E sont égaux, et que ABC est semblable à DEF. Enfin les angles solides A et C sont respectivement égaux aux

angles D et F, comme ayant les angles plans égaux chacun à chacun et semblablement placés ; donc les tétraèdres sont semblables.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables, et semblablement placés.



Décomposons en triangles les faces du polyèdre SEFGDABC, non adjacentes au sommet S ; ces triangles seront les bases de tétraèdres qui auront pour sommet commun le point S, et dont la somme composera le premier polyèdre.

Décomposons aussi en triangles et de la même manière les faces du polyèdre *sefgdabc*, non adjacentes au sommet *s* homologue de S, et joignons le point *s* aux sommets de ces triangles ; ce second polyèdre sera décomposé en tétraèdres, et il s'agit de montrer que ces tétraèdres sont respectivement semblables à ceux qui forment le premier polyèdre.

Si nous comparons les tétraèdres SDCA, *sdca*, nous voyons que les triangles SDA, CDA, sont respectivement semblables aux triangles *sda*, *cda*, à cause de la similitude des faces EDAS, *edas*, d'une part, et des faces CDAB, *cdab*, de l'autre ; de plus, l'angle dièdre DA est égal à l'angle dièdre *da*, puisque les faces des deux polyèdres sont également inclinées ; donc les deux tétraèdres SDCA, *sdca*, sont semblables comme ayant un angle dièdre égal compris sous deux faces semblables et semblablement disposées.

Si nous passons aux tétraèdres SDCF, *sdcf*, nous voyons

que les triangles SDC , sdc , sont semblables comme faces homologues de tétraèdres semblables; de même FDC est semblable à fdc , à cause de la similitude des polygones $FEDC$, $fedc$. D'ailleurs les dièdres $FDCA$, $fdca$, sont égaux par hypothèse, et les dièdres $SDCA$, $sdca$, sont égaux, à cause de la similitude des tétraèdres $SDCA$, $sdca$; donc les angles dièdres $FDCS$, $fdcs$, sont égaux comme différences d'angles dièdres égaux; donc enfin *, les tétraèdres $SDCF$, $sdcf$, sont semblables, et ainsi de suite....

Remarque I. Il faut remarquer que la décomposition précédente peut s'effectuer en partant de deux sommets homologues quelconques.

Remarque II. On conclut encore du théorème qui vient d'être démontré, que, dans deux polyèdres semblables, deux droites A , a , qui joignent des sommets homologues, sont proportionnelles à deux arêtes homologues, B , b , des deux polyèdres.

En effet, les droites A , a , seront les arêtes homologues de deux tétraèdres semblables faisant partie des deux polyèdres; et ces tétraèdres renfermeront nécessairement deux arêtes homologues C , c , des deux polyèdres; on aura donc

$$A : a :: C : c.$$

D'ailleurs, dans les polyèdres semblables, les arêtes homologues sont proportionnelles à cause de la similitude des faces.

On a donc aussi

$$C : c :: B : b;$$

donc enfin,

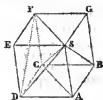
$$A : a :: B : b.$$

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

Deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés, ont les

faces semblables chacune à chacune, et les angles solides homologues égaux, et par conséquent sont semblables.



Soient $SABC$, $SADC$, $SCDF$, les pyramides qui composent le premier polyèdre; $sabc$, $sadc$, $scdf$, les pyramides qui forment le second.

1° Les triangles DCA , CAB , qui forment une face du premier polyèdre, sont respectivement semblables aux triangles dca , cab , situés à la surface du second polyèdre, à cause de la similitude des tétraèdres. De plus, les triangles DCA , CAB , étant dans un même plan, je dis qu'il en est de même des triangles dca , cab .

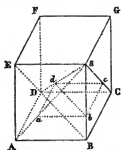
En effet, à cause de la similitude des tétraèdres $SCAD$ et $scad$, $SABC$ et $sabc$, les angles dièdres $SCAD$, $SCAB$, sont respectivement égaux aux angles dièdres $scad$, $scab$; or, la somme des deux premiers est égale à deux droits; donc la somme des deux derniers vaut deux droits; donc enfin, les polygones $DCBA$, $dcba$, sont semblables, comme étant composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés; et il en est de même des autres faces prises deux à deux.

2° On voit encore que l'angle dièdre SA , somme des dièdres $CSAD$, $CSAB$, est égal à l'angle dièdre sa , somme des angles dièdres $csad$, $csab$, respectivement égaux aux premiers; et qu'en général deux angles dièdres homologues des deux polyèdres sont égaux comme étant les sommes d'angles dièdres homologues de tétraèdres semblables.

Il en résulte que deux angles solides homologues A et a sont égaux, car ils ont leurs faces égales chacune à chacune, semblablement disposées et également inclinées.

Scolie. La démonstration qui vient d'être exposée justifie la définition qui a été donnée des polyèdres semblables;

car on peut toujours former des polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement placés.



En effet, décomposons le polyèdre SABDEFG en pyramides triangulaires, qui aient toutes leur sommet en S; et soient SBDC, SADB, SDAE,... les tétraèdres dont la somme compose le polyèdre.

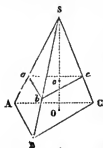
- * 25. Si nous divisons dans le même rapport toutes les arêtes partant du point S, aux points $a, b, c, d, \dots$ les tétraèdres $Sbdc, Saalb, \dots$ seront respectivement semblables* aux tétraèdres SBDC, SADB, ..., et seront semblablement disposés; leur somme composera donc un second polyèdre, qui, d'après le théorème précédent, sera semblable au premier.

Ce second polyèdre pourra ensuite être placé dans une position quelconque par rapport au premier.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

Deux tétraèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues.



Puisque les tétraèdres sont semblables, on peut porter le plus petit sur le plus grand, de manière qu'ils aient l'angle solide S commun, et alors les bases abc, ABC , seront parallèles, puisque les arêtes SA, SB, SC, sont divisées dans un même rapport aux points a, b, c .

Soit encore SO perpendiculaire sur ABC.

Les triangles ABC, abc , sont semblables; on a donc :

$$ABC : abc :: \overline{AB} : \overline{ab} \quad (1).$$

D'ailleurs on a aussi :

$$AB : ab :: SA : sa$$

et $SO : so :: SA : sa ;$

d'où il résulte, à cause du rapport commun ,

$$SO : so :: AB : ab \quad (2).$$

Multipliant par ordre les proportions (1) et (2), et divisant les termes du premier rapport par 3, il vient :

$$ABC \times \frac{SO}{3} : abc \times \frac{so}{3} :: \overline{AB} : \overline{ab} ;$$

or, $ABC \times \frac{SO}{3}$ est la mesure du tétraèdre $SABC$, et

$abc \times \frac{so}{3}$ est la mesure du tétraèdre $Sabc$; donc, etc.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

Deux polyèdres semblables sont comme les cubes de leurs arêtes homologues.

On sait que deux polyèdres semblables sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables.

Soient $T, T', T'' \dots$ les tétraèdres qui forment le polyèdre P ; $t, t', t'' \dots$ les tétraèdres qui composent p .

Soient encore A, A', A'' , des arêtes des tétraèdres $T, T', T'' \dots$ $a, a', a'' \dots$; leurs homologues dans les tétraèdres $t, t', t'' \dots$, on aura :

$$T : t :: A^3 : a^3,$$

$$T' : t' :: A'^3 : a'^3,$$

$$T'' : t'' :: A''^3 : a''^3;$$

et comme les lignes homologues des polyèdres semblables sont proportionnelles, on en conclut :

$$T : t :: T' : t' :: T'' : t'' \dots$$

d'où $T + T' + T'' \dots : t + t' + t'' \dots :: T : t : A^3 : a$

ou $P : p :: A^3 : a^3.$



LIVRE VII.

LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.



I. La *sphère* est un solide terminé par une surface courbe, dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle *centre*.

On peut imaginer que la sphère est produite par la révolution du demi-cercle DAE autour du diamètre DE : car la surface décrite dans ce mouvement par la courbe DAE aura tous ses points à distances égales du centre C.

II. Le *rayon de la sphère* est une ligne droite menée du centre à un point de la surface ; le *diamètre* ou *axe* est une ligne passant par le centre, et terminée de part et d'autre à la surface.

Tous les rayons de la sphère sont égaux ; tous les diamètres sont égaux et doubles du rayon.

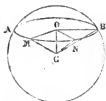
III. Un plan est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a qu'un point commun avec sa surface.

IV. Deux sphères sont *tangentes*, lorsque leurs surfaces n'ont qu'un point commun.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Toute section de la sphère, faite par un plan, est un cercle.



Soit AMB la section faite par un plan dans la sphère dont le centre est C . Du point C meuez la perpendiculaire CO sur le plan AMB , et différentes lignes CM , CN , CB , à différents points de la courbe AMB qui termine la section.

Les obliques CM , CN , CB , sont égales, puisqu'elles sont des rayons de la sphère; elles sont donc également éloignées de la perpendiculaire CO ; donc toutes les lignes OM , ON , OB , sont égales; donc la section AMB est un cercle dont le point O est le centre.

Corollaire I. Si la section passe par le centre de la sphère, son rayon sera le rayon de la sphère; donc tous les grands cercles sont égaux entre eux.

II. Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales; car leur intersection commune, passant par le centre, est un diamètre.

III. Tout grand cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales; car si, après avoir séparé les deux hémisphères, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité du même côté, les deux surfaces coïncideront l'une avec l'autre, sans quoi il y aurait des points plus près du centre les uns que les autres.

IV. Le centre d'un petit cercle et celui de la sphère sont sur une même droite perpendiculaire au plan du petit cercle.

V. Les petits cercles sont d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés du centre de la sphère; car plus la distance CO est grande, plus est petit le côté OB du triangle OBC .

VI. Par deux points donnés sur la surface d'une sphère, on peut faire passer un arc de grand cercle; car les deux points donnés et le centre de la sphère sont trois points qui déterminent la position d'un plan. Si cependant les deux points donnés étaient aux extrémités d'un diamètre, alors ces deux points et le centre seraient en ligne droite,

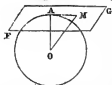
et il y aurait une infinité de grands cercles qui pourraient passer par les deux points donnés.

VII. La position d'un petit cercle sur la surface de la sphère serait déterminée par trois points de sa circonférence.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphère.



Soit FAG un plan perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA; si l'on prend un point quelconque M sur ce plan, et qu'on joigne OM et AM, l'angle OAM sera droit, et ainsi la distance OM sera plus grande que OA. Le point M est donc hors de la sphère; et, comme il en est de même de tout autre point du plan FAG, il s'ensuit que ce plan n'a que le seul point A commun avec la surface de la sphère; donc il est tangent à cette surface*.

Réciproquement, tout plan tangent FAG est perpendiculaire sur le rayon OA qui va au point de contact.

Car, si on joint au centre un point quelconque M de ce plan, OM sera plus grand que le rayon OA, puisque le point M est extérieur à la sphère. OA est donc la ligne la plus courte qu'on puisse mener du point O au plan FAG; donc OA est perpendiculaire sur ce plan.

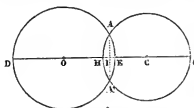
Corollaire. Par un point de la sphère on ne peut mener qu'un seul plan tangent.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

L'intersection de deux sphères est un cercle dont

le plan est perpendiculaire à la ligne qui joint leurs centres, et dont le centre est situé sur cette ligne.



Par la ligne OC qui joint les centres des deux sphères, menons un plan quelconque. Ce plan coupe les deux sphères suivant deux grands cercles qui se rencontrent

aux points A et A' symétriques par rapport à la ligne OC

Si maintenant nous faisons tourner les deux demi-cercles DAE, GAH, autour de OC, ces deux demi-cercles engendreront les surfaces des deux sphères, et le point A décrira leur ligne d'intersection. D'ailleurs, dans ce mouvement, la droite AI ne changera pas de grandeur et sera constamment perpendiculaire à OC; donc l'intersection des deux sphères est une circonférence dont le centre est en I, dont le rayon est AI, et dont le plan est perpendiculaire à OC.

Remarque. Suivant que les deux cercles DAA', GAA', seront extérieurs ou intérieurs, tangents extérieurement ou intérieurement, ou bien sécants, les deux sphères seront extérieures ou intérieures, tangentes extérieurement ou intérieurement, ou enfin sécantes.

Il y aura donc pour chacune de ces positions des deux sphères, les mêmes relations entre la distance des centres et les rayons des sphères, que pour les positions correspondantes de deux cercles.

DÉFINITIONS.

I. L'angle de deux arcs de grands cercles est l'angle dièdre formé par leurs plans. Les arcs de grands cercles en sont les côtés, et leur point de concours en est le sommet.

II. Un triangle sphérique est une portion de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grands cercles.

Ces arcs, qui s'appellent les côtés des triangles, sont toujours supposés moindres qu'une demi-circonférence; les angles formés par ces arcs de cercles sont les angles du triangle.

III. Un triangle sphérique est rectangle, isocèle, équilatéral, dans les mêmes cas qu'un triangle rectiligne.

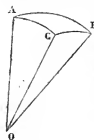
IV. Un polygone sphérique est une portion de la surface sphérique comprise entre plusieurs arcs de grands cercles.

Nous ne considérerons que des polygones sphériques convexes, c'est-à-dire tels que le plan de chaque côté laisse tout le reste du polygone d'un même côté de sa direction.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Dans tout triangle sphérique ABC, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

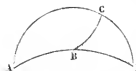


Soit O le centre de la sphère, et soient menés les rayons OA, OB, OC. Si on imagine les plans AOB, AOC, COB, ces plans formeront au point O un angle solide, et les angles AOB, AOC, COB, auront pour mesure les côtés AB, AC, BC, du triangle sphérique ABC. Or, chacun des trois angles plans qui composent l'angle solide est moindre que la somme des deux autres; donc un côté quelconque du triangle ABC est moindre que la somme des deux autres.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle.



Soit ABC un triangle sphérique quelconque; prolongez les côtés AB , AC , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en D . Les arcs ABD , ACD , seront des demi-

circonférences, puisque deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales*; mais dans le triangle * 1. BCD on a le côté $BC < BD + CD$ *; ajoutant de part et d'autre * 4. $AB + AC$, on aura $AB + AC + BC < ABD + ACD$, c'est-à-dire plus petit qu'une circonférence.

Remarque. Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que la somme des trois côtés soit plus petite qu'une circonférence, et que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres; car ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse construire un angle solide avec trois faces qui auraient pour mesures les trois côtés donnés. Et si l'on plaçait le sommet de cet angle solide au centre de la sphère, les faces intercepteraient le triangle demandé.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

La somme des côtés d'un polygone sphérique convexe est moindre qu'une circonférence de grand cercle.



Soit $ABCDE$ un polygone sphérique convexe; et menons du centre O de la sphère les rayons OA , OB , OC , OD , OE , nous formerons ainsi un angle solide qui sera convexe, et dont les angles plans AOB , AOC ,.... ont pour mesures les arcs AB , BC , CD . . . ; or, la somme des angles plans qui forment l'angle solide est moindre que 4 droits; donc la somme des arcs AB , BC , . . . est moindre qu'une circonférence.

DEFINITIONS.

I. Le pôle d'un cercle de la sphère est l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan de ce cercle.

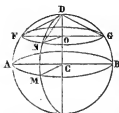
II. Tout cercle de la sphère a deux pôles.

III. Tous les cercles dont les plans sont parallèles ont les mêmes pôles.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Tous les points de la circonférence FNG d'un cercle de la sphère sont également distants du pôle D de ce cercle.



En effet, si on mène du centre O de la circonférence FNG, les rayons OF, ON, OG, et qu'on tire les droites DF, DN, DG, les triangles rectangles DOF, DON, DOG.... seront égaux; car ils ont le côté DO commun, et les lignes OF, ON, OG, sont égales comme rayons d'un même cercle; donc on a $DF = DN = DG$

On voit aussi par là que les arcs de grands cercles FD, DN, DG, sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales; et de plus les plans de ces grands cercles sont perpendiculaires sur le cercle FNG, car ils passent tous par la droite DO perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout ce qui vient d'être démontré s'applique évidemment au pôle d'un grand cercle AMB; mais, dans ce cas, les angles droits DCA, DCM, DCB, étant au centre des grands cercles DAE, DME...., les arcs DA, DM, DB, sont des quarts de circonférence ou des *quadrants*.

Scolie. Les propriétés des pôles permettent de tracer sur la surface de la sphère des arcs de cercle avec la même facilité que sur une surface plane.

On emploie à cet effet un compas appelé compas sphérique, dans lequel on donne aux deux branches une disposition qui permette d'incliner les pointes l'une sur l'autre sous un angle quelconque.

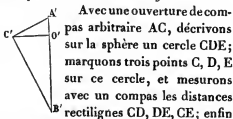
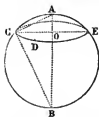
Il est évident que si on place une des pointes de ce compas en D, et l'autre en F, et que l'on fasse tourner ce compas autour du point D, l'extrémité F décrira le cercle FNG.

Si l'on voulait du point D, comme pôle, décrire un grand cercle AMB, il faudrait que la distance des deux pointes du compas fût égale à la corde d'un quadrant; et pour avoir cette distance, il faudrait connaître le rayon de la sphère.

PROPOSITION VIII.

PROBLÈME.

Étant donnée une sphère, trouver son rayon.



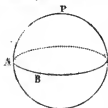
Avec une ouverture de compas arbitraire AC, décrivons sur la sphère un cercle CDE; marquons trois points C, D, E sur ce cercle, et mesurons avec un compas les distances rectilignes CD, DE, CE; enfin construisons sur un plan un triangle avec ces trois côtés; le rayon du cercle circonscrit à ce triangle sera le rayon du cercle CDE.

Cela posé, concevons par le diamètre AB de la sphère un grand cercle ACBE; concevons aussi qu'on tire les droites CA, CB et CO. Dans le triangle rectangle CAO, on connaît l'hypoténuse AC et le côté CO; on pourra donc construire sur un plan un triangle C'A'O' égal à CAO; de plus, la droite CB étant perpendiculaire sur CA, si l'on mène C'B' perpendiculaire sur A'C', la droite A'B', égale à AB, sera le diamètre de la sphère.

PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

Tracer sur une sphère un grand cercle passant par deux points A et B.

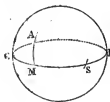


Des points A et B comme pôles, avec un intervalle égal à la corde du quadrant, décrivons deux grands cercles qui se coupent en P; le point P sera le pôle de l'arc de grand cercle AB, et servira à décrire cet arc.

PROPOSITION X.

PROBLÈME.

Abaisser d'un point A de la surface de la sphère, un grand cercle perpendiculaire sur un grand cercle.



Du point A comme pôle, avec un intervalle égal à un quadrant, décrivez un grand cercle qui coupe en S le cercle CMD. Puis du point S comme pôle, avec l'intervalle SA, décrivez le grand cercle AM, qui sera perpendiculaire sur CMD*.

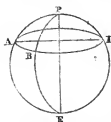
7.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Le plus court chemin du point A au point B sur la surface de la sphère, est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points.

Nous fonderons la démonstration de ce théorème sur les deux lemmes suivants.



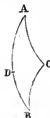
Lemme I. *Le plus court chemin du pôle P d'un cercle à tous les points de sa circonférence ABD est le même pour tous ces points.*

Cela résulte évidemment de l'égalité des arcs de grands cercles PA, PB, ... et de la symétrie parfaite de la sphère autour du diamètre passant par le pôle P.

Lemme II. *Soient AB, AC, deux arcs de grands cercles moindres qu'une demi-circonférence, et soit $AC < AB$; je dis que le plus court chemin de A en C est moindre que celui de A en B.*



En effet, décrivons du point A comme pôle, et avec l'intervalle AC, un cercle qui coupera nécessairement l'arc AB entre A et B, et soit AMB la ligne la plus courte entre A et B; cette ligne rencontrera le cercle CI en un point M, et la ligne AM sera le plus court chemin de A en M; car, s'il existait une ligne plus courte entre ces deux points, AMB ne serait pas le plus court chemin de A en B, ce qui est contre l'hypothèse. D'ailleurs, d'après le lemme précédent, le plus court chemin de A en M est le même que de A en C; donc le plus court chemin de A en C est moindre que de A en B.



Cela posé, soit AB l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui joint les points A et B; et supposons qu'il existe hors de cet arc un point C de la ligne la plus courte entre A et B. Menons les arcs de grands cercles AC, BC, et prenons $AD = AC$.

On a $AB < AC + CB$; retranchant de part et d'autre $AD = AC$, il reste $DB < CB$. Or, en vertu du lemme I, le plus court chemin de A en D est le même que de A en C;

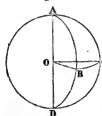
donc, puisque le point C appartient à la ligne la plus courte de A en B, il faudrait que la distance de C en B fût moindre que de D en B, conséquence absurde, d'après le lemme II, puisque l'arc BC est plus grand que BD. Donc aucun point de la plus courte distance entre A et B ne peut être hors de l'arc AB, donc l'arc AB est lui-même la ligne la plus courte qui a les mêmes extrémités.

Remarque. Dans la démonstration précédente, on suppose chacun des deux arcs AC, BC, moindre que AB; et il est évident qu'on ne peut faire une autre hypothèse, car, si on avait $AC > AB$, la ligne la plus courte de A en B serait moindre que de A en C; le point C ne pourrait donc pas appartenir à la première ligne.

PROPOSITION XII.

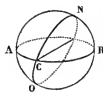
THÉORÈME.

L'angle BAC que font entre eux deux arcs de grands cercles a pour mesure l'arc de grand cercle BC, décrit du point A comme pôle, et compris entre les côtés de l'angle.



En effet, tirons les rayons OB, OC, les arcs AC, AB, étant des quadrants, les angles AOB, AOC, sont droits; donc BOC est l'angle plan correspondant à l'angle dièdre DBAC; mais l'angle au centre BOC a pour mesure l'arc BC, donc cet arc est la mesure de l'angle dièdre DBAC, qui est l'angle des deux arcs de grands cercles.

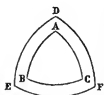
Corollaire. Les angles des triangles sphériques peuvent se comparer entre eux par les arcs de grands cercles décrits de leurs sommets comme pôles et compris entre leurs côtés: ainsi il est facile de faire un angle égal à un angle donné.



Scolie. Les angles opposés au sommet, tels que ACO et BCN, sont égaux ; car l'un ou l'autre est toujours l'angle formé par les deux plans ABC, OCN.

On voit aussi que dans la rencontre de deux arcs ACB, OCN, les deux angles adjacents ACO, OCB, pris ensemble, valent toujours deux angles droits.

DÉFINITIONS.



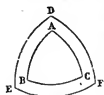
Un triangle sphérique ABC étant donné, si des points A, B, C comme pôles, on décrit les arcs de grands cercles EF, FD, DE, ces arcs forment un triangle DEF, qui est appelé le triangle *polaire* de ABC.

Le sommet homologue du point A est déterminé par la rencontre des arcs décrits des points B et C comme pôles ; ces arcs, il est vrai, se coupent en deux points ; mais il ne faut prendre que celui qui est du même côté que le point A par rapport à BC, et ainsi pour les autres sommets.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Si le triangle ABC a pour triangle polaire DEF, réciproquement ABC sera le triangle polaire de DEF.



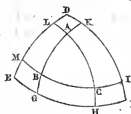
Car, le point A étant le pôle de l'arc EF, la distance AE est un quadrant ; le point C étant le pôle de l'arc DE, la distance CE est pareillement un quadrant ; donc le point E est éloigné d'un quadrant de chacun des points A et C ; donc il est le pôle de l'arc AC, et de plus il est du même côté que B, par rapport à AC ; on démontrerait de même que D est

le pôle de l'arc BC, et F celui de l'arc AB; donc ABC est le triangle polaire de DEF.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Étant donnés deux triangles polaires ABC, DEF, chaque angle de l'un de ces triangles aura pour mesure une demi-circonférence, moins le côté opposé dans l'autre triangle.



Soient prolongés, s'il est nécessaire, les côtés AB, AC, jusqu'à la rencontre de EF en G et H; puis-que le point A est le pôle de l'arc GH, l'angle A aura pour mesure l'arc GH. Mais l'arc EH est un quadrant ainsi que GF, puisque E est le pôle de AH, et F le pôle de AG; donc EH + GF vaut une demi-circonférence. Or EH + GF est la même chose que EF + GH; donc l'arc GH qui mesure l'angle A est égal à une demi-circonférence moins le côté EF; de même l'angle B aura pour mesure $\frac{1}{2}$ circ. — DF, et l'angle C, $\frac{1}{2}$ circ. — DE.

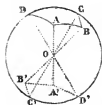
Cette propriété doit être réciproque entre les deux triangles, puisqu'ils se décrivent de la même manière l'un par le moyen de l'autre. Ainsi on trouvera que les angles D, E, F, du triangle DEF, ont pour mesures respectivement : $\frac{1}{2}$ circ. — BC, $\frac{1}{2}$ circ. — AC, $\frac{1}{2}$ circ. — AB. En effet l'angle D, par exemple, a pour mesure l'arc MI; or MI + BC = MC + BI = $\frac{1}{2}$ circ. : donc l'arc MI, mesure de l'angle D, = $\frac{1}{2}$ circ. — BC; et ainsi des autres.

Scolie. Si du centre de la sphère on mène des rayons aux sommets des triangles ABC, DEF, on forme deux angles trièdres dont les angles plans ont pour mesures les

côtés des triangles sphériques, et dont les angles dièdres ne sont autres que les angles des mêmes triangles.

Or, il résulte du théorème qui vient d'être démontré que, dans ces deux angles trièdres, les angles dièdres de l'un sont les suppléments des faces de l'autre, et réciproquement; donc ces angles trièdres sont supplémentaires.

DÉFINITIONS.



Soit ABCD un polygone sphérique; menons du centre des rayons aux sommets de ce polygone, et prolongeons-les jusqu'à ce qu'ils rencontrent de nouveau la sphère en A', B', C', D'. Enfin tirons les arcs A'B', B'C', A'D', C'D'.

Les angles solides formés en O sont symétriques, par conséquent ils ont leurs angles plans et leurs angles dièdres respectivement égaux. Donc aussi les polygones sphériques ABCD, A'B'C'D' ont toutes leurs parties égales. Néanmoins ces polygones ne sont pas superposables; car, si l'on porte le côté C'D' sur son égal CD de manière que les autres côtés des deux polygones tombent d'un même côté par rapport à CD, le point D' sera en C, et, en parcourant les deux polygones dans le même sens à partir du point C, les côtés et les angles se présenteront dans un ordre inverse.

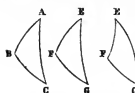
Ces polygones sphériques sont appelés symétriques, quelles que soient d'ailleurs les positions respectives qu'on leur donne sur la surface de la sphère.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Deux triangles situés sur la même sphère, ou sur des sphères égales, sont égaux dans toutes leurs par-

ties, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.



Soit le côté $AB=EF$, le côté $AC=EG$, et l'angle $BAC=FEG$; le triangle EFG pourra être placé sur le triangle ABC , de la même manière qu'on superpose deux triangles rectilignes qui ont un angle égal compris entre côtés égaux. Donc toutes les parties du triangle EFG seront égales à celles du triangle ABC , c'est-à-dire qu'outre les trois parties qui sont supposées égales, on aura le côté $BC=FG$, l'angle $ABC=EFG$, et l'angle $ACB=EGF$.

Si les côtés égaux des deux triangles étaient inversement disposés par rapport aux deux angles égaux, on superposerait EFG sur le symétrique de ABC , et on serait conduit à la même conclusion.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Deux triangles situés sur la même sphère, ou sur des sphères égales, sont égaux dans toutes leurs parties, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

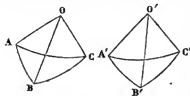
Car l'un de ces triangles peut être placé sur l'autre ou sur son symétrique, comme on le fait dans le cas pareil des triangles rectilignes. (*Voy. prop. VI, liv. I.*)

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Si deux triangles situés sur la même sphère, ou sur des sphères égales, sont équilatéraux entre eux, ils

seront aussi équiangles, et les angles égaux seront opposés aux côtés égaux.



Joignons les centres des sphères O et O' aux sommets des deux triangles; nous formerons ainsi deux angles trièdres dont les angles plans ayant pour me-

sures les côtés des triangles sphériques, sont respectivement égaux; mais on a démontré que dans ce cas les angles dièdres opposés aux faces égales sont égaux: donc dans les deux triangles sphériques les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Dans tout triangle sphérique isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.



Soit le côté $AB=AC$; je dis qu'on aura l'angle $C=B$: car si du sommet A au point D , milieu de la base, on mène l'arc AD , les deux triangles ABD , ADC , auront les trois côtés égaux chacun à chacun; savoir, AD commun, $BD=DC$, et $AB=AC$: donc, par le théorème précédent, ces triangles auront les angles égaux, et on aura $B=C$.

La même démonstration prouve que l'angle $BAD=DAC$, et que l'angle $BDA=ADC$. Donc ces deux derniers sont droits; donc l'arc mené du sommet d'un triangle sphérique isocèle au milieu de sa base est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.

Scolie. Il résulte encore de ce théorème, que le symétrique d'un triangle sphérique isocèle lui est égal par superposition.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés opposés sont égaux.

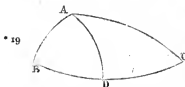


Soit l'angle $B = C$; je dis qu'on aura $AC = AB$: car, si le côté AB n'est pas égal à AC , soit AB le plus grand des deux, prenez $BO = AC$, et joignez OC . Les deux côtés BO, BC , sont égaux aux deux AC, BC ; l'angle compris par les premiers, OBC , est égal à l'angle compris par les seconds, ACB . Donc les deux triangles BOC, ACB , ont les autres parties égales*, et on a l'angle $OCB = ABC$: mais l'angle ABC , par hypothèse, $= ACB$; donc on aurait $OCB = ACB$, ce qui est impossible; donc on ne peut supposer AB différent de AC ; donc les côtés AB, AC , opposés aux angles égaux B et C , sont égaux.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Dans un triangle sphérique ABC , si l'angle A est plus grand que l'angle B , le côté BC opposé à l'angle A sera plus grand que le côté AC opposé à l'angle B ; réciproquement, si le côté BC est plus grand que CA , l'angle A sera plus grand que l'angle B .



1° Soit l'angle $A > B$, faites l'angle $BAD = B$, vous aurez $AD = DB$ *: mais $AD + DC$ est plus grand que AC ; à la place de AD mettant DB , on aura $DB + DC$ ou $BC > AC$.

2° Si on suppose $BC > AC$, je dis que l'angle BAC sera

plus grand que ABC : car, si BAC était égal à ABC , on aurait $BC = AC$; et si on avait $BAC < ABC$, il s'ensuivrait, par ce qui vient d'être démontré, qu'on a $BC < AC$; ce qui est contre la supposition. Donc l'angle BAC est plus grand que ABC .

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

Si deux triangles tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont équiangles entre eux, ils seront aussi équilatéraux.

Soient A et B les deux triangles donnés, P et Q leurs triangles polaires. Puisque les angles sont égaux dans les triangles A et B , les côtés seront égaux dans les polaires P et Q : mais de ce que les triangles P et Q sont équilatéraux entre eux, il s'ensuit qu'ils sont aussi équiangles ; * 14. enfin, de ce que les angles sont égaux dans les triangles P et Q , il s'ensuit* que les côtés sont égaux dans leurs polaires A et B . Donc les triangles équiangles A et B sont en même temps équilatéraux entre eux. * 17.

Scolie. Cette proposition n'a pas lieu dans les triangles rectilignes, où de l'égalité des angles on ne peut conclure que la proportionnalité des côtés. Mais il est aisé de rendre compte de la différence qui se trouve à cet égard entre les triangles rectilignes et les triangles sphériques. Dans la proposition présente, ainsi que dans les prop. 16, 17, 18, 22, où il s'agit de la comparaison des triangles, il est dit expressément que ces triangles sont tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales. Or les arcs semblables sont proportionnels aux rayons ; donc, sur des sphères égales, deux triangles ne peuvent être semblables sans être égaux. Il n'est donc pas surprenant que l'égalité des angles entraîne l'égalité des côtés.

Il en serait autrement si les triangles étaient tracés sur des sphères inégales ; alors, les angles étant égaux, les

triangles seraient semblables, et les côtés homologues seraient entre eux comme les rayons des sphères.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

1° *La somme des angles de tout triangle sphérique est moindre que six et plus grande que deux droits.*

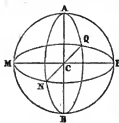
2° *Le plus petit angle augmenté de deux droits est plus grand que la somme des deux autres.*

- 1° En effet, la mesure de chaque angle d'un triangle sphérique est égale à la demi-circonférence, moins le côté opposé du triangle polaire*. Donc la somme des trois angles a pour mesure trois demi-circonférences moins la somme des côtés du triangle polaire. Or cette dernière somme est plus grande que zéro, et moindre qu'une circonférence, donc en la retranchant de trois demi-circonférences, le reste sera plus petit que trois demi-circonférences et plus grand qu'une demi-circonférence; donc la somme des angles d'un triangle sphérique est moindre que six droits, et plus grande que deux droits.

Corollaire. Un triangle sphérique peut avoir deux ou trois angles droits, deux ou trois angles obtus.



Si le triangle ABC est *bi-rectangle*, c'est-à-dire s'il a deux angles droits B et C, le sommet A sera le pôle de la base BC; et les côtés AB, AC, seront des quadrants.



Si en outre l'angle A est droit, le triangle ABC sera *tri-rectangle*, ses angles seront tous droits et ses côtés des quadrants. Le triangle tri-rectangle est contenu huit fois dans la surface de la sphère; c'est ce que l'on voit par la fig. 236, en supposant l'arc MN égal à un quadrant.

2° Soient A, B, C les angles du triangle, et A le plus petit; $180^\circ - A, 180^\circ - B, 180^\circ - C$ seront les côtés du triangle polaire*; or on a

* 4.

$$180 - A < 180 - B + 180 - C;$$

d'où ajoutant de part et d'autre $A + B + C$, et retranchant 180 , on déduit

$$B + C < 180^\circ + A.$$

Avec trois angles A, B, C qui satisfont aux conditions énoncées dans ce théorème, on peut former un triangle sphérique, car ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse construire un angle trièdre avec les trois angles dièdres A, B, C .



Scolie. Nous avons supposé dans tout ce qui précède, que les triangles sphériques ont leurs côtés toujours plus petits que la demi-circonférence; nous observerons cependant qu'il existe des triangles sphériques dont certains côtés sont plus grands que la demi-circonférence, et certains angles plus grands que deux angles droits. Car, si on prolonge le côté AC en une circonférence entière ACE , ce qui reste, en retranchant de la demi-sphère le triangle ABC , est un nouveau triangle, qu'on peut désigner aussi par ABC , et dont les côtés sont AB, BC, AEC . On voit donc que le côté AEC est plus grand que la demi-circonférence; mais en même temps l'angle opposé en B surpasse deux angles droits.

Au reste, si on a exclu de la définition les triangles dont les côtés et les angles sont si grands, c'est que leur résolution ou la détermination de leurs parties se réduit toujours à celle des triangles renfermés dans la définition. En effet, on voit aisément que si on connaît les angles et les côtés du triangle ABC , on connaîtra immédiatement les angles et les côtés du triangle de même nom qui est le reste de la demi-sphère.

DÉFINITIONS.

I. On appelle fuseau, la portion de la surface de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles qui se terminent à un diamètre commun.

II. L'onglet sphérique est la partie du volume de la sphère comprise entre les mêmes demi-grands cercles, et à laquelle le fuseau sert de base.

III. La pyramide sphérique est la partie du solide de la sphère comprise entre les plans d'un angle solide, dont le sommet est au centre; la base de la pyramide est le polygone sphérique intercepté par les mêmes plans.

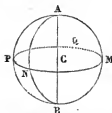
Lorsque deux polygones sphériques coïncident, les pyramides dont ils sont les bases coïncident également.

IV. Nous appellerons pyramides sphériques symétriques celles qui ont pour bases des polygones symétriques.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Le fuseau AMBNA est à la surface de la sphère comme l'angle MAN de ce fuseau est à quatre angles droits, ou comme l'arc MN qui mesure cet angle est à la circonférence.



Supposons d'abord que l'arc MN soit commensurable avec la circonférence MNPQ, et qu'en divisant celle-ci en 48 parties égales, l'arc MN contienne 5 de ces parties; le rapport de l'arc MN à la circonférence est $\frac{5}{48}$.

Faisons ensuite passer des plans par le diamètre AB et les points de division, nous formerons sur la sphère 48 fuseaux tous égaux entre eux comme ayant même angle, et l'on voit que 5 de ces fuseaux seront

contenus dans AMBN ; le rapport de ce fuseau à la surface de la sphère sera donc aussi $\frac{b}{48}$; il sera donc le même que celui de l'arc MN à la circonférence MNPQ.

Si l'arc MN n'est pas commensurable avec la circonférence, on prouvera, par le raisonnement connu, que le fuseau est toujours à la sphère comme l'arc MN est à la circonférence.

Mesure du fuseau. Soient F, F' deux fuseaux dont les angles sont A et A', on a, d'après le théorème ci-dessus,

$$\begin{array}{ll} & F : \text{sph.} :: A : 4^{\text{dr}}, \\ \text{et} & F' : \text{sph.} :: A' : 4^{\text{dr}}; \\ \text{d'où} & F : F' :: A : A'. \end{array} \quad (1)$$

Si donc on veut mesurer un fuseau en le comparant à un autre fuseau pris pour unité, on voit, par la proportion ci-dessus, qu'il suffit de chercher le rapport des angles de ces fuseaux.

Supposons qu'on prenne pour unité de fuseau F', celui dont l'angle est droit, la proportion (1) devient

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{1^{\text{dr}}}. \quad (2)$$

Ainsi, le rapport d'un fuseau au fuseau droit est égal au rapport de son angle à un angle droit ; ce qu'on exprime d'une manière abrégée en disant que le fuseau a pour mesure son angle.

Si l'on prenait pour unité de surface le triangle trirectangle T qui est la moitié du fuseau droit, on aurait, en remplaçant F' par 2T dans l'égalité (2)

$$\frac{F}{2T} = \frac{A}{1^{\text{dr}}} ;$$

d'où, en multipliant de part et d'autre par 2, on conclut

$$\frac{F}{T} = \frac{2A}{1^{\text{dr}}}.$$

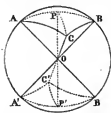
Donc, le rapport d'un fuseau au triangle trirectangle est égal au rapport du double de son angle à un droit ; ou bien, en d'autres termes, un fuseau a pour mesure le double de son angle.

Scolie. On verrait aussi qu'un onglet est au volume de la sphère comme son angle est à 4 droits ; et qu'un onglet a pour mesure son angle, en prenant pour unité de volume l'onglet droit, et pour unité d'angle, l'angle droit ; ou bien le double de son angle, en prenant pour unité de volume la pyramide trirectangle, qui est la moitié de l'onglet droit, et pour unité d'angle, l'angle droit.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Deux triangles sphériques symétriques sont égaux en surface.



Soit ABC un triangle sphérique, et $A'B'C'$ son symétrique. Prenons le pôle P du petit cercle qui passe par les points A, B, C (*); les arcs de grands cercles PA, PB, PC , sont égaux. Menons enfin le diamètre POP' , et les arcs de grands cercles $P'A', P'B', P'C'$.

Les angles $POA, P'OA'$ sont égaux comme opposés par le sommet, donc l'arc $PA = P'A'$; par la même raison, $PB = P'B'$, et $PC = P'C'$, et comme $PA = PB = PC$, on a $P'A' = P'B' = P'C'$.

Cela posé, les triangles $APC, A'P'C'$, ont les trois côtés égaux chacun à chacun ; de plus, ils sont isocèles ; donc ils sont superposables. On verrait de même que le triangle

(*) Le cercle qui passe par les trois points A, B, C , ou qui est circonscrit au triangle ABC , ne peut être qu'un petit cercle de la sphère ; car, si c'était un grand cercle, les trois côtés AB, BC, AC , seraient situés dans un même plan, et le triangle ABC se réduirait à un de ses côtés.

CPB est égal au triangle $C'P'B'$, et que le triangle APB est égal au triangle $A'P'B'$; donc enfin le triangle ABC, qui est la somme des triangles APC, CPB, APB, est égal en surface au triangle $A'B'C'$, qui est la somme des triangles $A'P'C'$, $C'P'B'$, $A'P'B'$.

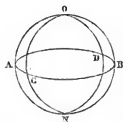
Remarque I. Si le pôle P était hors du triangle ABC, alors il faudrait faire la somme de deux triangles isocèles, et en retrancher le troisième pour avoir le triangle ABC; mais comme la même chose aurait lieu pour le triangle ABC, la conclusion serait la même.

Remarque II. On verrait de la même manière que les deux pyramides sphériques symétriques qui ont pour bases les triangles ABC, $A'B'C'$ sont équivalentes.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Si deux grands cercles AOB, COD, se coupent comme on voudra dans l'hémisphère AOCBD, la somme des triangles opposés AOC, BOD, sera égale au fuseau dont l'angle est BOD.



Car, en prolongeant les arcs OB, OD, dans l'autre hémisphère jusqu'à leur rencontre en N, OBN sera une demi-circonférence, ainsi que AOB; retranchant de part et d'autre OB, on aura $BN = AO$. Par une raison semblable, on a $DN = CO$, et $BD = AC$; donc les deux triangles AOC, BDN, ont les trois côtés égaux; d'ailleurs leur position est telle qu'ils sont symétriques l'un de l'autre; donc ils sont égaux en surface*, et la somme des triangles AOC, BOD, est équivalente au fuseau OBND dont l'angle est BOD.

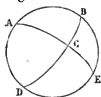
Scolie. Il est clair aussi que les deux pyramides sphériques qui ont pour bases les triangles AOC, BOD, prises

ensemble, équivalent à l'onglet sphérique dont l'angle est BOD.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

La surface d'un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits.



Soit ABC le triangle proposé; achevons le grand cercle AB, puis prolongeons les arcs AB, AC, jusqu'à leur rencontre avec ce grand cercle. On a évidemment

$$ABC + BCE = \text{fuseau A,}$$

$$ABC + ACD = \text{fuseau B,}$$

et, à cause du théorème précédent,

$$ABC + DCE = \text{fuseau C.}$$

Ajoutant, et observant que la somme de ces six triangles excède la demi-sphère de deux fois le triangle ABC, il vient

$$2 \cdot ABC + \frac{1}{2} \text{ sphère} = \text{fuseau A} + \text{fuseau B} + \text{fuseau C.}$$

Done, en retranchant de part et d'autre la demi-sphère, et divisant par 2, on a

$$ABC = \frac{\text{fuseau A} + \text{fuseau B} + \text{fuseau C} - \frac{1}{2} \text{ sphère}}{2}.$$

Divisons les deux membres de l'égalité par la surface du triangle trirectangle, que nous appellerons T, il vient

$$\frac{ABC}{T} = \frac{\text{fuseau A} + \text{fuseau B} + \text{fuseau C} - \frac{1}{2} \text{ sphère}}{2T},$$

$$\text{or, } \frac{\text{fuseau A}}{2T} = \frac{A}{1^{\text{dr.}}}, \quad \frac{\text{fuseau B}}{2T} = \frac{B}{1^{\text{dr.}}}, \quad \frac{\text{fuseau C}}{2T} = \frac{C}{1^{\text{dr.}}},$$

$$\text{et } \frac{\frac{1}{2} \text{ sphère}}{2T} = 2; \quad \text{donc}$$

$$\frac{ABC}{T} = \frac{A + B + C}{1^{\text{dr.}}} - 2 = \frac{A + B + C - 2^{\text{dr.}}}{1^{\text{dr.}}}.$$

Ainsi le rapport d'un triangle sphérique au triangle trirectangle est égal au rapport de l'excès de la somme de ses angles sur deux droits à un angle droit; ce que l'on exprime d'une manière abrégée, en disant qu'un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits.

Scolie I. Si les angles du triangle sont donnés par les nombres de degrés des arcs qui leur servent de mesures, on retranchera 180° de leur somme, et on cherchera le rapport de la différence à 90° .

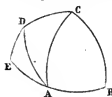
Application. Soient $A = 70^\circ 10'$, $B = 60^\circ 20'$, $C = 80^\circ$, en retranchant 180° de la somme de ces arcs, on trouve pour différence $30^\circ 30'$; et pour obtenir le rapport de $30^\circ 30'$ à 90° , il faut réduire ces deux nombres de degrés en minutes, et diviser le premier nombre par le second: on trouve ainsi que le triangle proposé est les $\frac{1800}{6400}$ ou le $\frac{1}{4}$ du triangle trirectangle.

Scolie II. On démontrerait semblablement qu'une pyramide sphérique triangulaire a pour mesure l'excès de la somme des angles de sa base sur deux droits (en prenant pour unité de volume la pyramide trirectangle, et pour unité d'angle l'angle droit).

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

La surface d'un polygone sphérique a pour mesure la somme de ses angles, moins le produit de deux angles droits par le nombre des côtés du polygone moins deux.



D'un même sommet A soient menées à tous les autres sommets les diagonales AC, AD; le polygone ABCDE sera partagé en autant de triangles moins deux qu'il a de côtés. Mais la surface de chaque triangle a pour mesure la

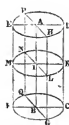
somme de ses angles moins deux angles droits, et il est clair que la somme de tous les angles des triangles est égale à la somme des angles du polygone : donc la surface du polygone a pour mesure la somme de ses angles, diminuée d'autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux.

Scolie. Soit s la somme des angles d'un polygone sphérique, n le nombre de ses côtés; l'angle droit étant supposé l'unité, la surface du polygone aura pour mesure $s-2(n-2)$ ou $s-2n+4$.

LIVRE VIII.

LES TROIS CORPS RONDS.

DÉFINITIONS.



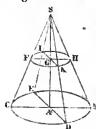
I. On appelle *cylindre* le solide produit par la révolution d'un rectangle ABCD, qu'on imagine tourner autour du côté immobile AB.

Dans ce mouvement les côtés AD, BC, restant toujours perpendiculaires à AB, décrivent des plans circulaires égaux DPH, CGQ, qu'on appelle les *bases du cylindre*, et la ligne CD, appelée *génératrice*, en décrit la surface latérale.

La ligne immobile AB s'appelle l'*axe du cylindre*.

Toute section KLM, faite dans le cylindre, perpendiculairement à l'axe, est un cercle égal à chacune des bases : car, pendant que le rectangle ABCD tourne autour de A, la ligne IK, perpendiculaire à AB, décrit un plan circulaire égal à la base, et ce plan n'est autre chose que la section faite perpendiculairement à l'axe au point L.

Toute section PQGH, faite suivant l'axe, est un rectangle double du rectangle générateur ABCD.



II. On appelle *cône* le solide produit par la révolution du triangle rectangle SAB, qu'on imagine tourner autour du côté immobile SA.

Dans ce mouvement, le côté AB décrit un plan circulaire BDCE, qu'on appelle la *base du cône*, et l'hypoténuse SB en décrit la *surface latérale*.

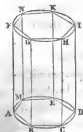
Le point S s'appelle *le sommet du cône*, SA *l'axe* ou la *hauteur*, et SB *le côté* ou *l'apothème*.

Toute section HKFI, faite perpendiculairement à l'axe, est un cercle; toute section SDE, faite suivant l'axe, est un triangle isocèle double du triangle générateur SAB.

III. Si du cône SCDB on retranche, par une section parallèle à la base, le cône SFKH, le solide restant CBHF s'appelle *cône tronqué* ou *tronc de cône*.

On peut supposer qu'il est décrit par la révolution du trapèze ABHG, dont les angles A et G sont droits, autour du côté AG. La ligne immobile AG s'appelle *l'axe* ou la *hauteur du tronc*; les cercles BDC, HFK, en sont *les bases*, et BH en est *le côté*.

IV. Deux cylindres ou deux cônes sont *semblables*, lorsque leurs axes sont entre eux comme les diamètres de leurs bases.

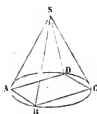


V. Si, dans le cercle ACD qui sert de base à un cylindre, on inscrit un polygone ABCDE, et que sur la base ABCDE on élève un prisme droit égal en hauteur au cylindre, le prisme est dit *inscrit dans le cylindre*, ou le cylindre *circonscrit au prisme*.

Il est clair que les arêtes AF, BG, CH, etc., du prisme, étant perpendiculaires au plan de la base, sont comprises dans la surface convexe du cylindre; donc le prisme et le cylindre se touchent suivant ces arêtes.

Nous admettrons comme une chose évidente que si le nombre des côtés du polygone inscrit devenait très-grand, la différence entre la surface latérale du cylindre et la surface latérale du prisme deviendrait moindre que toute quantité donnée, ou en d'autres termes, *la surface latérale d'un cylindre est la limite de la surface latérale d'un prisme inscrit dont le nombre des faces croît indéfiniment*.

Nous admettrons de même que *le volume d'un cylindre est la limite du volume d'un prisme inscrit dont le nombre des faces croît indéfiniment*.



Soit encore ABCD un polygone inscrit dans le cercle ABC qui sert de base à un cône, et construisons une pyramide SABCD, ayant pour base ce polygone, et pour sommet le point S; les arêtes SA, SB, SC, SD, de cette pyramide appartiennent à la surface du cône, et cette pyramide est dite *inscrite* dans le cône, ou le cône *circonscrit* à la pyramide.

Nous admettrons encore que *la surface latérale du cône est la limite de la surface latérale d'une pyramide inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment*; et aussi que *le volume d'un cône est la limite du volume des mêmes pyramides*.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Le volume d'un cylindre a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.



Inscrivons dans la base du cylindre un polygone régulier, et construisons le prisme droit ayant pour base ce polygone, et même hauteur que le cylindre.

Soit B la base du prisme, V son volume, et H la hauteur du cylindre, on a

$$V = B \times H.$$

Or, le volume du cylindre est la limite du volume d'un prisme inscrit dont le nombre des faces croît indéfiniment. On aura donc la mesure du cylindre, en prenant la limite du produit $B \times H$. Mais le polygone inscrit B a pour limite la surface du cercle, et le facteur H est constant; donc, enfin,

$$\text{vol. cylindre} = \text{cercle} \times H.$$

Corollaire I. Les cylindres de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et les cylindres de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

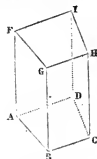
Corollaire II. Les cylindres semblables sont comme les cubes des hauteurs, ou comme les cubes des diamètres des bases. Car les bases sont comme les carrés de leurs diamètres; et puisque les cylindres sont semblables, les diamètres des bases sont comme les hauteurs*; donc les bases sont comme les carrés des hauteurs; donc les bases multipliées par les hauteurs, ou les cylindres eux-mêmes, sont comme les cubes des hauteurs.

Scolie. Soit R le rayon de la base d'un cylindre, H sa hauteur, la surface de la base sera πR^2 , et la solidité du cylindre sera $\pi R^2 \times H$, ou $\pi R^2 H$.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

La surface latérale d'un prisme droit a pour mesure le périmètre de sa base multiplié par sa hauteur.



Car cette surface est égale à la somme des rectangles $AFGB$, $BGHC$, $CHID$, etc., dont elle est composée; or les hauteurs AF , BG , CH , etc., de ces rectangles sont égales à la hauteur du prisme; leurs bases AB , BC , CD , etc., prises ensemble, font le périmètre de la base du prisme. Donc la somme de ces rectangles ou la surface latérale du prisme est égale au périmètre de sa base multiplié par sa hauteur.

Corollaire. Si deux prismes droits ont la même hauteur, les surfaces latérales de ces prismes seront entre elles comme les périmètres de leurs bases.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

La surface latérale d'un cylindre a pour mesure la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur.



Inscrivons dans la base du cylindre un polygone régulier, et construisons le prisme droit qui a pour base ce polygone, et même hauteur que le cylindre.

Soit P le périmètre de la base, S la surface latérale du prisme, et H la hauteur du cylindre; on a $S = P \times H$.

Mais la surface latérale du cylindre est la limite de la surface d'un prisme inscrit dont le nombre des faces croit indéfiniment; donc on aura la mesure de la surface du cylindre en prenant la limite de $P \times H$. Or le périmètre P du polygone inscrit a pour limite la longueur de la circonférence, et le facteur H est constant; donc enfin,

$$\text{surf. cylindre} = \text{circ.} \times H.$$

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Le volume d'un cône a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.



Inscrivons dans la base du cône un polygone régulier, et construisons la pyramide ayant pour base ce polygone, et pour sommet, le sommet du cône.

Soit B la surface du polygone inscrit, V le volume de la pyramide et H la hauteur du cône; on a

$$V = B \times \frac{H}{3};$$

Or le volume du cône est la limite du volume d'une pyramide inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'ailleurs la base B de la pyramide a pour limite la surface du cercle, et le facteur $\frac{H}{3}$ est constant; donc

$$\text{vol. cylindre} = \text{cercle} \times \frac{H}{3}.$$

Corollaire. Un cône est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur; d'où il suit,

1° Que les cônes d'égale hauteur sont entre eux comme leurs bases;

2° Que les cônes de bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs;

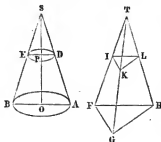
3° Que les cônes semblables sont entre eux comme les cubes des diamètres de leurs bases, ou comme les cubes de leurs hauteurs.

Scolie. Soit R le rayon de la base d'un cône, H sa hauteur, la solidité du cône sera $\pi R^2 \times \frac{1}{3} H$ ou $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Le cône tronqué ADEB, dont AO, DP, sont les rayons des bases et PO la hauteur, a pour mesure $\frac{1}{3} \pi \cdot OP \cdot (\overline{AO} + \overline{DP} + AO \times DP)$.



Soit TFGH une pyramide triangulaire de même hauteur que le cône SAB, et dont la base FGH soit équivalente à la base du cône. On peut supposer que ces deux bases sont placées sur un même plan; alors les sommets S et T seront à égales distances du

plan des bases, et le plan EPD prolongé fera dans la pyramide la section IKL. Or je dis que cette section IKL est équivalente à la base DE; car les bases AB, DE, sont entre elles comme les carrés des rayons AO, DP, ou comme les carrés des hauteurs SO, SP; les triangles FGH, IKL, sont entre eux comme les carrés de ces mêmes hauteurs; donc les cercles AB, DE, sont entre eux comme les triangles FGH, IKL. Mais, par hypothèse, le triangle FGH est équivalent au cercle AB; donc le triangle IKL est équivalent au cercle DE.

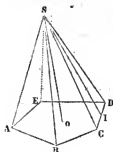
Maintenant, la base AB multipliée par $\frac{1}{3}$ SO est la solidité du cône SAB, et la base FGH multipliée par $\frac{1}{3}$ SO est celle de la pyramide TFGH; donc, à cause des bases équivalentes, la solidité de la pyramide est égale à celle du cône. Par une raison semblable, la pyramide TIKL est équivalente au cône SDE; donc le tronc de cône ADEB est équivalent au tronc de pyramide FGHIKL. Mais la base FGH, équivalente au cercle dont le rayon est AO, a pour mesure $\pi \times \overline{AO}$; de même la base IKL $= \pi \times \overline{DP}$, et la moyenne proportionnelle entre $\pi \times \overline{AO}$ et $\pi \times \overline{DP}$ est $\pi \times AO \times DP$, donc la solidité du tronc de pyramide, ou celle du tronc de cône, a pour mesure $\frac{1}{3} OP \times (\pi \times \overline{AO} + \pi \times \overline{DP} + \pi \times AO \times DP)$, qui est la même chose que $\frac{1}{3} \pi \times OP \times (\overline{AO} + \overline{DP} + AO \times DP)$.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

La surface latérale d'une pyramide régulière SABCD E a pour mesure le périmètre de sa base multiplié par la moitié de l'apothème SI ().*

(*) L'apothème est la perpendiculaire abaissée du sommet S sur un des côtés de la base de la pyramide.



En effet, la surface latérale de la pyramide régulière se compose des triangles isocèles égaux $\triangle SCD$, $\triangle SBC$, $\triangle SAB$...; or on a

$$\triangle SCD = CD \times \frac{SI}{2},$$

$$\triangle SBC = BC \times \frac{SI}{2},$$

$$\triangle SAB = AB \times \frac{SI}{2}.$$

.....

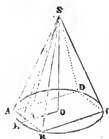
Donc, en ajoutant, on obtient pour la mesure de la surface latérale de la pyramide:

$$(CD + BC + AB + AE + ED) \times \frac{SI}{2}.$$

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

La surface latérale d'un cône a pour mesure la circonférence de sa base multipliée par la moitié de son côté.



Inscrivons dans la base du cône un polygone régulier ABCD, et construisons la pyramide régulière ayant pour base ce polygone, et pour sommet le point S.

Soit P le périmètre du polygone, S la surface latérale de la pyramide, et SI l'apothème; on aura

$$S = P \times \frac{SI}{2}.$$

Or, S a pour limite la surface latérale du cône; P a pour limite la circonférence OE; et il est facile de reconnaître

que SI a pour limite SE; car on a $SE - SI < EI$, et l'on sait que EI peut devenir moindre que toute quantité donnée lorsque le nombre des côtés du polygone inscrit est suffisamment grand; donc

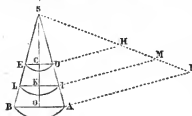
$$\text{surf. cône} = \text{circ. OE} \times \frac{SE}{2}.$$

Sco'ie. Soit L le côté d'un cône, R le rayon de sa base, la circonférence de cette base sera $2\pi R$, et la surface du cône aura pour mesure $2\pi R \times \frac{1}{2}L$, ou πRL .

PROPOSITION VIII.

THÉOREME.

La surface latérale du tronc de cône ADEB a pour mesure son côté AD multiplié par la demi-somme des circonférences de ses deux bases AB, DE.



lèle à AF.

Dans le plan SAB qui passe par l'axe SO, menez perpendiculairement à SA la ligne AF, égale à la circonférence qui a pour rayon AO; joignez SF, et menez DH paral-

A cause des triangles semblables SAO, SDC, on aura $AO : DC :: SA : SD$; et à cause des triangles semblables SAF, SDH, on aura $AF : DH :: SA : SD$; donc $AF : DH :: AO : DC$, ou $:: \text{circ. AO} : \text{circ. DC}$. Mais par construction $AF = \text{circ. AO}$; donc $DH = \text{circ. DC}$. Cela posé, le triangle SAF, qui a pour mesure $AF \times \frac{1}{2}SA$, est égal à la surface du cône SAB qui a pour mesure $\text{circ. AO} \times \frac{1}{2}SA$. Par une raison semblable, le triangle SDH est égal à la surface du cône SDE. Donc la surface du tronc ADEB est égale à celle du

trapèze ADHF. Celle-ci a pour mesure $AD \times \left(\frac{AF+DH}{2} \right)$

donc la surface du tronc de cône ADEB a pour mesure son côté AD multiplié par la demi-somme des circonférences de ses deux bases.

Corollaire. Par le point I, milieu de AD, menez IKL parallèle à AB, et IM parallèle à AF; on démontrera comme ci-dessus que $IM = \text{circ. IK}$. Mais le trapèze $ADHF = AD \times IM = AD \times \text{circ. IK}$. Donc on peut dire encore que la surface d'un tronc de cône a pour mesure son côté multiplié par la circonférence d'une section faite à égale distance des deux bases.

Scolie. Si une ligne AD, située tout entière d'un même côté de la ligne OC et dans le même plan, fait une révolution autour de OC, la surface décrite par AD aura pour mesure $AD \times \left(\frac{\text{circ. AO} + \text{circ. DC}}{2} \right)$, ou $AD \times \text{circ. IK}$, les

lignes AO, DC, IK, étant des perpendiculaires abaissées des extrémités et du milieu de la ligne AD sur l'axe OC.

Car, si on prolonge AD et OC jusqu'à leur rencontre mutuelle en S, il est clair que la surface décrite par AD est celle d'un cône tronqué dont OA et DC sont les rayons des bases, le cône entier ayant pour sommet le point S. Donc cette surface aura la mesure mentionnée.

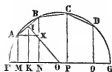
Cette mesure aurait toujours lieu, quand même le point D tomberait en S, ce qui donnerait un cône entier, et aussi quand la ligne AD serait parallèle à l'axe, ce qui donnerait un cylindre. Dans le premier cas DC serait nulle, dans le second DC serait égale à AO et à IK.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

La surface engendrée par une portion de polygone régulier ABCD, tournant autour d'un diamètre FG, a

pour mesure la circonférence du cercle inscrit dans le polygone ABCD, multipliée par la projection MQ du contour ABCD sur le diamètre FG.



Le point I étant au milieu de AB, et IK étant une perpendiculaire à l'axe abaissée du point I, on a

(*) Surf. AB = AB $\times$ circ. IK.

Menez AX parallèle à l'axe, les triangles ABX, OIK, auront les côtés perpendiculaires chacun à chacun; donc ces triangles sont semblables, et donnent la proportion

AB : AX ou MN :: OI : IK :: circ. OI : circ. IK;

d'où

$$AB \times \text{circ. IK} = MN \times \text{circ. OI};$$

donc

$$\text{surf. AB} = MN \times \text{circ. OI}.$$

On verrait de même que

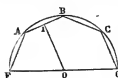
$$\text{surf. BC} = NP \times \text{circ. OI},$$

et

$$\text{surf. CD} = PQ \times \text{circ. OI};$$

donc, en ajoutant

$$\text{surf. ABCD} = (MN + NP + PQ) \times \text{circ. OI} = MQ \times \text{circ. OI}.$$



Corollaire. Si l'on considère un polygone régulier d'un nombre de côtés pair, et que l'axe FG passe par deux sommets opposés F, G, la surface entière décrite par la révolution du demi-polygone FACG sera égale à son axe FG multiplié par la circonférence du cercle inscrit. Cet axe FG sera en même temps le diamètre du cercle circonscrit.

(*) Nous entendons par surf. AB, surf. BC, les surfaces engendrées par les lignes AB, BC...

Mais circ. OI a pour limite circ. OM, et le facteur EF est constant; donc

$$\text{zone AB} = \text{circ. OM} \times \text{EF.}$$

Corollaire I. Dans des sphères égales, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs.

Corollaire II. La surface de la sphère, pouvant être considérée comme une zone dont la hauteur est égale au diamètre, a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par le diamètre.

Soit R le rayon de la sphère, on aura donc

$$\text{surf. sph.} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2;$$

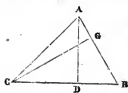
d'où l'on voit que la sphère est égale à quatre grands cercles.

Corollaire III. La surface de la sphère étant ainsi mesurée avec le carré construit sur l'unité de longueur, on pourra facilement évaluer avec la même unité les fuseaux, les triangles et les polygones sphériques, puisqu'on a trouvé, dans le livre VII, leur rapport au triangle tri-rectangle, qui est la huitième partie de la sphère.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan, et passant par un de ses sommets, a pour mesure la surface décrite par le côté opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur correspondante à ce côté.



1° Supposons d'abord que le triangle CAB tourne autour d'un de ses côtés CB. Le volume engendré par CAB est la somme des cônes décrits par les triangles rectangles CAD, ADB; on a donc

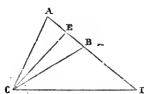
$$(*) \text{ vol. CAB} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{\text{AD}} \cdot \text{CD} + \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{\text{AD}} \cdot \text{DB} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{\text{AD}} \cdot \text{CB} \quad (1).$$

Or, si l'on abaisse CG perpendiculaire sur AB, on a $\text{CG} \times \text{AB} = \text{CB} \times \text{AD}$, car ces deux produits mesurent le double de l'aire du triangle CAB; remplaçant dans l'égalité (1) $\text{AD} \times \text{CB}$ par $\text{CG} \times \text{AB}$, il vient

$$\text{vol. CAB} = \frac{1}{3}\pi \cdot \text{AD} \cdot \text{CG} \cdot \text{AB} = \frac{1}{3}\text{CG} \cdot \pi \cdot \text{AD} \cdot \text{AB}.$$

Or $\pi \cdot \text{AD} \cdot \text{AB}$ mesure la surface latérale du cône qui serait engendrée par AB, donc

$$\text{vol. CAB} = \text{surf. AB} \times \frac{1}{3}\text{CG}.$$



2° Supposons maintenant que le triangle CAB tourne autour d'une droite CD passant par un de ses sommets; prolongeons AB jusqu'à sa rencontre avec l'axe en D, et abaissons CE per-

pendiculaire sur AB.

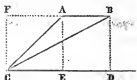
$$\text{On aura} \quad \text{vol. CAB} = \text{vol. CAD} - \text{vol. CBD}.$$

$$\text{Or} \quad \text{vol. CAD} = \text{surf. AD} \times \frac{1}{3}\text{CE};$$

$$\text{et} \quad \text{vol. CBD} = \text{surf. BD} \times \frac{1}{3}\text{CE}.$$

$$\text{Donc} \quad \text{vol. CAB} = (\text{surf. AD} - \text{surf. BD}) \times \frac{1}{3}\text{CE} \\ = \text{surf. AB} \times \frac{1}{3}\text{CE}.$$

3° La démonstration précédente supposant que le côté AB vienne rencontrer l'axe CD, examinons le cas où ces deux lignes sont parallèles.



Abaissons AE et BD perpendiculaires sur l'axe CD, et CF perpendiculaire sur AB; nous aurons évidemment

$$\text{vol. CAB} = \text{vol. CAE} + \text{vol. ABDE} - \text{vol. CBD}.$$

(*) Nous appelons vol. CAB le volume engendré par le triangle CAB tournant autour de CB.

$$\begin{aligned}\text{Or} \quad \text{vol. CAE} &= \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{\text{AE}} \cdot \text{CE} \\ \text{vol. ABDE} &= \pi \cdot \overline{\text{AE}} \cdot \text{ED} \\ \text{vol. CBD} &= \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{\text{AE}} \cdot \text{CD}.\end{aligned}$$

Ajoutant les deux premières égalités, et retranchant la troisième, il vient

$$\text{vol. CAB} = \pi \cdot \overline{\text{AE}} \left(\frac{1}{3}\text{CE} + \text{ED} - \frac{1}{3}\text{CD} \right).$$

Et comme $\text{CD} = \text{CE} + \text{ED}$, l'égalité précédente devient

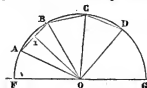
$$\begin{aligned}\text{vol. CAB} &= \pi \cdot \overline{\text{AE}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \text{ED} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{\text{AE}} \cdot 2\pi \cdot \text{AE} \cdot \text{ED} \\ &= \frac{1}{3}\text{CF} \cdot \text{surf. AB};\end{aligned}$$

ce qui s'accorde avec l'énoncé du théorème.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Soit ABCD une portion de polygone régulier : si on imagine que le secteur polygonal AOD, situé d'un même côté du diamètre FG, fasse une révolution autour de ce diamètre, le solide décrit aura pour mesure la surface engendrée par le contour ABCD, multipliée par le tiers de l'apothème OI.



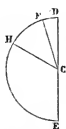
En effet, le volume engendré par le secteur AOD est la somme des volumes engendrés par les triangles isocèles égaux AOB, BOC, COD.

$$\begin{aligned}\text{O}^* \quad \text{vol. AOB} &= \text{surf. AB} \times \frac{1}{3}\text{OI} \\ \text{vol. BOC} &= \text{surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{OI} \\ \text{vol. COD} &= \text{surf. CD} \times \frac{1}{3}\text{OI}.\end{aligned}$$

Donc, en ajoutant, on a

$$\begin{aligned}\text{vol. AOD} &= \frac{1}{3}\text{OI} (\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. CD}) \\ &= \frac{1}{3}\text{OI} + \text{surf. ABCD}.\end{aligned}$$

DÉFINITIONS.



I. Tandis que le demi-cercle DHE, tournant autour du diamètre DE, décrit la sphère, tout secteur circulaire FCH décrit un solide appelé *secteur sphérique*.

Le secteur sphérique est terminé par la zone que décrit l'arc FH.

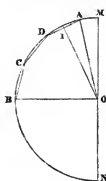
II. Un *segment* de sphère est la partie du volume de la sphère comprise entre deux plans parallèles.

La *hauteur* du segment est la distance des plans parallèles.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Un secteur sphérique a pour mesure la zone qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon.



Soit AOB le secteur circulaire qui, en tournant autour de MN, engendre le secteur sphérique.

Inscrivons dans l'arc AB une portion de polygone régulier ADCB; et appelons V le volume engendré par le secteur polygonal ADCBO; on aura

$$V = \text{surf. ADCB} \times \frac{1}{3} \text{OI.}$$

Or nous admettrons comme une chose évidente que le volume du secteur sphérique est la limite du volume engendré par le secteur polygonal, lorsque le nombre des côtés de la portion inscrite dans l'arc AB croît indéfiniment.

On aura donc la mesure du secteur sphérique, en prenant la limite de surf. ADCB $\times \frac{1}{3}$ OI; mais surf. ADCB a pour limite zone AB, et OI a pour limite OM; donc

$$\text{secteur sphérique} = \text{zone AB} \times \frac{1}{3} \text{OM.}$$

Scolie I. Si le secteur circulaire qui décrit le secteur sphérique devenait égal au demi-cercle, le volume engendré serait celui de la sphère; mais alors la zone qui sert de base au secteur sphérique serait la surface de la sphère; d'où l'on voit que le volume d'une sphère a pour mesure sa surface multipliée par le tiers du rayon.

Scolie II. Soient R le rayon de la sphère, et H la hauteur de la zone qui sert de base au secteur sphérique; la zone a pour mesure $2\pi R.H$; donc le secteur sphérique a pour mesure $2\pi R.H.\frac{1}{3}R$ ou $\frac{2}{3}\pi R^2.H$.

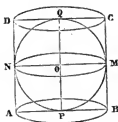
Dans le cas où le secteur sphérique devient égal à la sphère, on a $H=2R$; donc la mesure du volume de la sphère est $\frac{2}{3}\pi R^2.2R$ ou $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Si l'on appelle D le diamètre de la sphère, on a $R=\frac{D}{2}$; d'où $R^3=\frac{D^3}{8}$; le volume de la sphère s'exprimera donc aussi par $\frac{4}{3}\pi.\frac{D^3}{8}$ ou $\frac{1}{6}\pi D^3$.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

La surface de la sphère est à la surface totale du cylindre circonscrit (en y comprenant ses bases) comme 2 est à 3. Les volumes de ces deux corps sont entre eux dans le même rapport.



Soit MPNQ le grand cercle de la sphère, ABCD le carré circonscrit ; si on fait tourner à la fois le demi-cercle PMQ et le demi-carré PADQ autour du diamètre PQ, le demi-cercle décrira la sphère, et le demi-carré décrira le cylindre circonscrit à la sphère.

La hauteur AD de ce cylindre est égale au diamètre PQ, la base du cylindre est égale au grand cercle, puisqu'elle a pour diamètre AB égale à MN ; donc la surface convexe du cylindre est égale à la circonférence du grand cercle multipliée par son diamètre. Cette mesure est la même que celle de la surface de la sphère * : d'où il suit que *la surface de la sphère est égale à la surface latérale du cylindre circonscrit*.

Mais la surface de la sphère est égale à quatre grands cercles ; donc la surface latérale du cylindre circonscrit est égale aussi à quatre grands cercles : si on y joint les deux bases qui valent deux grands cercles, la surface totale du cylindre circonscrit sera égale à six grands cercles ; donc la surface de la sphère est à la surface totale du cylindre circonscrit comme 4 est à 6, ou comme 2 est à 3. C'est le premier point qu'il s'agissait de démontrer.

En second lieu, puisque la base du cylindre circonscrit est égale à un grand cercle, et sa hauteur au diamètre, le volume du cylindre sera égal au grand cercle multiplié par le diamètre *. Mais le volume de la sphère est égal à quatre grands cercles multipliés par le tiers du rayon *, ce qui revient à un grand cercle multiplié par $\frac{4}{3}$ du rayon, ou $\frac{2}{3}$ du diamètre ; donc la sphère est au cylindre circonscrit comme 2 est à 3, et par conséquent les volumes de ces deux corps sont entre eux comme leurs surfaces.

Scolie. Si on imagine un polyèdre dont toutes les faces touchent la sphère, ce polyèdre pourra être considéré

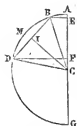
comme composé de pyramides qui ont toutes pour sommet le centre de la sphère, et dont les bases sont les différentes faces du polyèdre. Or il est clair que toutes ces pyramides auront pour hauteur commune le rayon de la sphère ; de sorte que chaque pyramide sera égale à la face du polyèdre qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon : donc le polyèdre entier sera égal à sa surface multipliée par le tiers du rayon de la sphère inscrite.

On voit par là que les volumes des polyèdres circonscrits à la sphère sont entre eux comme les surfaces de ces mêmes polyèdres. Ainsi, la propriété que nous avons démontrée pour le cylindre circonscrit est commune à une infinité d'autres corps.

On aurait pu remarquer également que les surfaces des polygones circonscrits au cercle sont entre elles comme leurs contours.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.



Le solide engendré par le segment circulaire BMD tournant autour d'un diamètre ACG extérieur à ce segment, a pour mesure la sixième partie du cercle qui aurait pour rayon la corde BD du segment, multipliée par la projection EF de la corde BD sur l'axe AC.

En effet, on a $\text{vol. BMD} = \text{vol. CDME} - \text{vol. CDB}$.

$$\text{Or} \quad \text{vol. CDMB} = \frac{2}{3} \pi \overline{\text{CB}}^3 \cdot \text{EF} \quad (1)$$

$$\text{vol. CDB} = \frac{1}{3} \text{CI} \times \text{surf. DB.}$$

Et comme $\text{surf. DB} = 2\pi \text{Cl. EF}$,

$$\text{on a vol. CDB} = \frac{2}{3} \pi \overline{\text{Cl}}^2 \cdot \text{EF.} \quad (2)$$

Retranchant l'égalité (2) de l'égalité (1), membre à membre, il vient :

$$\text{vol. BMD} = \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{EF} (\overline{CB} - \overline{CI}).$$

D'ailleurs, dans le triangle CBI, on a

$$\overline{CB} - \overline{CI} = \overline{BI} = \frac{\overline{BD}}{4}.$$

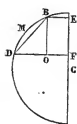
$$\text{Donc} \quad \text{vol. BMD} = \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{EF} \cdot \frac{\overline{BD}}{4} = \frac{1}{6}\pi \overline{BD} \cdot \overline{EF}.$$

Scolie. Le solide décrit par le segment BMD est à la sphère qui a pour diamètre BD, comme $\frac{1}{6}\pi \cdot \overline{BD} \cdot \overline{EF}$ est à $\frac{1}{6}\pi \cdot \overline{BD}^3$, ou :: EF : BD.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Tout segment de sphère, compris entre deux plans parallèles, a pour mesure la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus la solidité de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre.



Soient BE, DF, les rayons des bases du segment, EF sa hauteur, de sorte que le segment soit produit par la révolution de l'espace circulaire BMDFE autour de l'axe FE.

$$\text{On a} \quad \text{vol BMD} = \frac{1}{6}\pi \cdot \overline{BD} \cdot \overline{EF},$$

$$\text{vol BDFE} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{EF} \cdot (\overline{BE} + \overline{DF} + \overline{BE} \cdot \overline{DF});$$

donc le segment de sphère qui est la somme de ces deux volumes a pour mesure

$$\frac{1}{6}\pi \cdot \overline{EF} \cdot (\overline{BD} + \overline{BE} + \overline{DF} + \overline{BE} \cdot \overline{DF} + \overline{BD}^2).$$

Mais, en menant BO parallèle à EF, on aura

$$DO = DF - BE, \quad \overline{DO}^2 = \overline{DF}^2 - 2DF \cdot BE + \overline{BE}^2,$$

et par conséquent

$$\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2DF \times BE + \overline{BE}^2.$$

Mettant cette valeur à la place de $\overline{BD}^2$ dans l'expression du segment, et effaçant ce qui se détruit, on aura pour la solidité du segment,

$$\frac{1}{6}\pi \cdot EF \cdot (3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2),$$

expression qui se décompose en deux parties; l'une

$$\frac{1}{6}\pi \cdot EF \cdot (3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2), \text{ ou } EF \cdot \left(\frac{\pi \cdot \overline{BE}^2 + \pi \cdot \overline{DF}^2}{2} \right)$$

est la demi-somme des bases multipliée par la hauteur; l'autre $\frac{1}{6}\pi \cdot \overline{EF}^2$ représente la sphère dont EF est le diamètre *; donc tout segment de sphère, etc.

* 13. sc

Corollaire. Si l'une des bases est nulle, le segment dont il s'agit devient un segment sphérique à une seule base; donc tout segment sphérique à une base équivaut à la moitié du cylindre de même base et de même hauteur, plus la sphère dont cette hauteur est le diamètre.

FIN DU HUITIÈME LIVRE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

THÉORÈMES A DÉMONTRER.

1. Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan parallèle à cette droite sera perpendiculaire au premier plan.
2. Deux droites parallèles font des angles égaux avec le même plan.
3. Si dans un angle trièdre deux des angles plans sont égaux, les dièdres opposés seront égaux, et réciproquement.
4. Dans un angle trièdre, à un plus grand dièdre est opposée une plus grande face, et réciproquement.
5. Les trois plans perpendiculaires aux faces d'un angle trièdre, menés suivant les trois bissectrices des angles plans de ce trièdre, se rencontrent suivant la même droite.
6. Les trois plans menés suivant les arêtes d'un angle trièdre perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant la même droite.
7. Les plans menés par les arêtes d'un angle trièdre et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.
8. Si par le sommet d'un angle trièdre on mène dans chaque face une perpendiculaire sur l'arête opposée, ces trois perpendiculaires seront dans un même plan.
9. Dans tout tétraèdre, les lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées se coupent mutuellement en deux parties égales.
10. Deux tétraèdres qui ont un angle solide égal sont entre eux comme les produits des arêtes qui comprennent l'angle solide égal.

11. Deux tétraèdres qui ont un angle dièdre égal sont entre eux comme les produits des faces qui comprennent cet angle dièdre.

12. Le plan bissecteur d'un angle dièdre d'une pyramide triangulaire divise l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces adjacentes.

13. Si un tétraèdre renferme un angle solide tri-rectangle, le carré de la face opposée sera égal à la somme des carrés des trois autres.

14. Le volume d'un parallépipède tronqué a pour mesure le produit de sa base par la perpendiculaire abaissée du centre de la base supérieure sur la base inférieure.

15. Dans un tétraèdre, les lignes qui joignent chaque sommet au point de concours des médianes de la face opposée se coupent en un même point. (Ce point est le centre de gravité du tétraèdre.)

16. La perpendiculaire abaissée du centre de gravité d'un tétraèdre sur un plan, est la moyenne des perpendiculaires abaissées des quatre sommets du tétraèdre sur le même plan. (Comment doit-on interpréter le théorème, lorsque les sommets ne sont pas d'un même côté par rapport au plan?)

17. Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre divise ce tétraèdre en deux parties équivalentes.

18. Par quatre points non situés dans un même plan on peut faire passer une sphère, et on n'en peut faire passer qu'une.

19. Dans tout tétraèdre on peut inscrire une sphère.

20. Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan des trois centres.

21. Quand trois droites rectangulaires-coupent une sphère, et passent par un même point, la somme des carrés des cordes comprises est constante.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET PROBLÈMES.

Dans la géométrie plane, nous avons défini lieu géométrique, une ligne renfermant tous les points du plan jouissant d'une propriété commune. De même, dans la

géométrie de l'espace, on appelle *lieu géométrique* la série des points de l'espace qui satisfont à une ou deux conditions données. Ce lieu géométrique peut être une surface ou une ligne.

Ainsi, la sphère est le lieu géométrique des points situés à une même distance d'un point donné, et la perpendiculaire élevée au plan d'un cercle en son centre est le lieu géométrique des points qui sont également distants de tous les points de la circonférence.

1. Trouver le lieu des points à égale distance de deux points donnés.

2. Trouver le lieu des points également distants de trois points donnés.

3. Trouver le lieu des points également distants de deux plans donnés.

4. Trouver le lieu des points également distants de trois plans donnés.

5. Trouver le lieu des points de l'espace également distants de deux droites situées dans un même plan.

6. Lieu des points de l'espace à égale distance de trois droites situées dans un même plan.

7. Trouver le lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à deux plans donnés soit égale à une ligne donnée.

8. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux à deux points donnés soit égale à un carré donné.

9. Trouver le lieu des points tels que la différence des carrés des distances de chacun de ces points à deux points donnés soit égale à un carré donné.

10. On coupe par une suite de plans parallèles deux droites non situées dans un même plan, et on tire les lignes qui joignent les points d'intersection de chacun de ces plans avec les deux droites données; on demande le lieu géométrique des points qui divisent toutes ces lignes de jonction dans le rapport de m à n .

11. Étant données deux droites rectangulaires non situées dans un même plan, on insère entre ces deux droites des lignes de longueur donnée, et on demande le lieu géométrique des milieux de ces droites.

12. Calculer le volume engendré par un hexagone régulier, tournant autour d'un de ses côtés.

13. Trouver le volume engendré par un demi-décagone régulier dont le côté est a , tournant autour du diamètre du cercle circonscrit.

14. Trouver la surface de la terre en myriamètres carrés.

15. Trouver quelle serait la mesure d'une pyramide, si l'on prenait pour unité de volume la sphère qui a pour rayon l'unité linéaire, et pour unité de surface le cercle qui a pour rayon l'unité de longueur.

16. Les angles d'un triangle sphérique sont respectivement : $58^{\circ} 18'$, $64^{\circ} 8'$, $82^{\circ} 4'$, le rayon de la sphère est 6^m ; calculer en mètres carrés la surface du triangle sphérique.

17. Trouver le volume d'un segment sphérique à une base dont la hauteur est 4^m , et situé sur une sphère dont le rayon est 9^m .

18. Les rayons des bases d'un cône tronqué sont 3^m et 5^m , et son arête a 7^m de longueur; trouver la surface et le volume du cône tronqué.

FIN DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

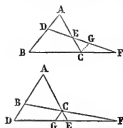
APPENDICE AU LIVRE III.

THÉORIE DES TRANSVERSALES.

On appelle *Transversale* une ligne droite qui vient rencontrer un système de plusieurs lignes.

THÉORÈME I.

Si les trois côtés d'un triangle, prolongés s'il le faut, sont coupés par une transversale, il y a sur chaque côté deux segments, et ces six segments sont tels que le produit de trois d'entre eux, n'ayant aucune extrémité commune, est égal au produit des autres.



Soit ABC le triangle proposé, et DEF la transversale. Menons, par le point C, une parallèle CG au côté AB, jusqu'à la rencontre de la transversale. Les triangles semblables ADE, EGC, donnent la proportion $AE : CE :: AD : CG$,

$$\text{d'où } AE \times CG = CE \times AD \quad (1).$$

Les triangles semblables CGF, FBD, donnent aussi la proportion $CF : BF :: CG : BD$,
d'où l'on déduit $CF \times BD = BF \times CG \quad (2).$

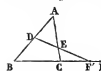
multipliant les égalités (1) et (2), et divisant par le facteur commun CG, on a

$$AE \times CF \times BD = AD \times BF \times CE.$$

THÉORÈME II.

Réciproquement, si trois points pris en nombre pair sur les côtés

d'un triangle et en nombre impair sur les prolongements des côtés, déterminent six segments tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit égal au produit des trois autres, ces trois points seront en ligne droite.



Soit ABC le triangle, et soient D, E, F, trois points tels que

$$AD \times BF \times CE = BD \times CF \times AE \quad (1);$$

Je dis que les trois points D, E, F, seront en ligne droite; car si la droite DE rencontrait BC en un point F' différent de F, on aurait, en vertu du théorème précédent,

$$AD \times BF' \times CE = BD \times CF' \times AE \quad (2).$$

Divisant l'égalité (1) par l'égalité (2), et supprimant les facteurs communs, il vient

$$\frac{BF}{BF'} = \frac{CF'}{CF};$$

d'où $BF - CF : BF' - CF' :: BF : BF'$,

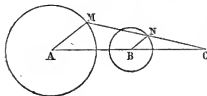
ou encore $BC : BC :: BF : BF'$;

proposition évidemment fautive, à moins que le point F' ne se confonde avec le point F.

Remarque. Ce théorème donne souvent le moyen de reconnaître très-simplement si trois points sont en ligne droite; nous allons en donner un exemple.

LEMME I.

Deux circonférences A et B étant données, si l'on mène deux rayons AM, BN, parallèles et dirigés dans le même sens, la droite MN, qui joint leurs extrémités, rencontrera la ligne des centres en un point C, qui sera le même, quelle que soit la direction des rayons parallèles AM, BN.



En effet, les triangles semblables AMC, BNC donnent la proportion

$$AC : BC :: AM : BN;$$

d'où $AC - BC$ ou

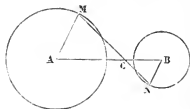
$$AB : BC :: AM - BN : BN.$$

Or, AB , $AM - AN$, BN , sont des quantités constantes; donc BC aura aussi une valeur constante.

Ce point C est appelé *Centre de similitude directe* des deux circonférences, et sa position sur la ligne des centres est déterminée par la proportion $AC : BC :: AM : BN$. On verrait, en outre, très-facilement, que ce point est à la rencontre des tangentes communes extérieures.

LEMME II.

Étant données deux circonférences A et B , si l'on mène les rayons AM , BN , parallèles et dirigés en sens contraire, la droite MN rencontrera la ligne des centres en un point C , qui sera le même, quelle que soit la direction des rayons AM , BN .



En effet, les triangles semblables AMC , BNC , donnent la proportion

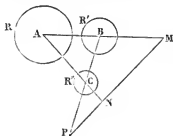
$$AC : CB :: AM : BN.$$

Le point C divise la droite AB dans le rapport des deux rayons; donc ce point est constant.

On appelle ce point *Centre de similitude inverse* des deux circonférences. On peut voir aussi quel est le point de concours des tangentes communes intérieures.

THÉORÈME III.

Les centres de similitude directe de trois cercles, pris deux à deux, sont en ligne droite.



Soient A , B , C , les centres des trois cercles; R , R' , R'' , leurs rayons, et soient M , N , P , les centres de similitude directe de ces cercles pris deux à deux; on a

$$AM : BM :: R : R'$$

$$BP : CP :: R' : R''$$

$$CN : AN :: R'' : R.$$

Multipliant ces proportions terme à terme il vient

$$AM \times BP \times CN : BM \times CP \times AN :: R \times R' \times R'' : R' \times R'' \times R ;$$

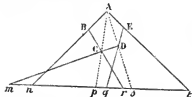
d'où $AM \times BP \times CN = BM \times CP \times AN.$

Or, par rapport au triangle ABC, AM, BP, CN, sont trois segments n'ayant pas d'extrémité commune, et BM, CP, AN, forment trois autres segments non consécutifs, et puisque le produit des trois premiers est égal au produit des trois autres, on en conclut que les points M, N, P, sont en ligne droite.

Remarque. Le même théorème aurait lieu si l'on prenait deux centres de similitude inverse et un de similitude directe.

THÉORÈME IV.

Si les côtés d'un polygone plan, ou leurs prolongements, sont coupés par une transversale, il y aura, sur chaque côté, deux segments formés par la transversale, tels que le produit des segments qui n'ont pas d'extrémités communes sera égal au produit de tous les autres.



Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, coupé par la transversale mnpqr; je dis qu'on aura

$$An.Br.Cm.Dq.Et = Bn.Cr.Dm.Eq.At.$$

En effet, menons de l'un des sommets A du polygone des diagonales à tous les autres sommets, et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre avec la transversale.

Les triangles ABC, ACD, AED, considérés séparément comme coupés par la transversale, donneront

$$An.Br.Cp = Bn.Cr.Ap$$

$$Ap.Cm.Ds = Cp.Dm.As$$

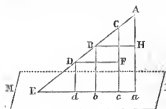
$$As.Dq.Et = Ds.Eq.At.$$

Multipliant ces égalités, et supprimant les facteurs communs, il vient

$$An.Br.Cm.Dq.Et = Bn.Cr.Dm.Eq.At.$$

THÉORÈME V.

Si l'on projette sur un plan les différentes portions d'une droite, chaque projection sera égale à la portion de droite correspondante, multipliée par un nombre constant pour toutes ces droites.



Projetons sur le plan MN les portions AB, CD, de la droite AE, et soient ab , cd , ces projections; puis menons DF et BH, parallèles à Ea.

Les triangles semblables CDF, ABH, donnent la proportion

$$\frac{DF}{DC} = \frac{BH}{AB},$$

ou, à cause de $dc = DF$ et $ba = BH$,

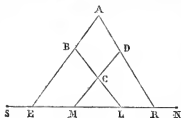
$$\frac{dc}{DC} = \frac{ab}{AB};$$

donc, si $\frac{dc}{DC} = m$, d'où $dc = DC \times m$,

on aura $\frac{ab}{AB} = m$, d'où $ab = AB \times m$.

THÉORÈME VI.

Si les côtés d'un polygone gauche, ou leurs prolongements, sont coupés par un plan transversal, il y aura, sur chaque côté, deux segments tels, que le produit de tous ceux de ces segments qui n'ont pas d'extrémité commune, sera égal au produit de tous les autres.



Soit $\alpha\beta\gamma\delta$ le polygone proposé, et soient ε , λ , μ , ρ , les points où les côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\delta\gamma$, $\alpha\delta$, rencontrent le plan transversal. Projetons ce polygone sur un plan perpendiculaire au plan transversal.

Supposons que ABCD soit

cette projection, et soit SN l'intersection du plan de projection et du plan transversal.

Si nous prolongeons les côtés du polygone ABCD jusqu'à leur rencontre avec SN, on aura, d'après le théorème IV,

$$AE.BL.CM.DR = BE.CL.DM.AR \quad (1).$$

Or, AE et BE sont les projections, sur un même plan, des segments $\alpha\varepsilon$, $\beta\varepsilon$, du polygone gauche; on a donc *

$$AE = \alpha\varepsilon.m; \quad BE = \beta\varepsilon.m;$$

$$\text{on a de même} \quad BL = \beta\lambda.n, \quad CL = \gamma\lambda.n,$$

$$CM = \gamma\mu.p, \quad DM = \delta\mu.p,$$

$$DR = \delta\rho.r, \quad AR = \alpha\rho.r.$$

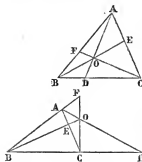
Remplaçant dans l'égalité (1) les segments AE, BE, BL, CL, ..., par leurs valeurs, et divisant de part et d'autre, par $m.n.p.r$, il vient

$$\alpha\varepsilon.\beta\lambda.\gamma\mu.\delta\rho = \beta\varepsilon.\gamma\lambda.\delta\mu.\alpha\rho,$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME VII.

Si l'on joint un point O pris dans le plan d'un triangle ABC, aux trois sommets de ce triangle, ces droites déterminent sur les côtés du triangle, ou sur leurs prolongements, six segments, tels que le produit AF.BD.CE de trois segments non consécutifs, est égal au produit FB.DC.AE des trois autres.



En effet, le triangle ABD, coupé par la transversale FC, donne l'égalité

$$AF.BC.DO = BF.DC.AO \quad (1).$$

Pareillement, le triangle ADC, coupé par la transversale BE, donne

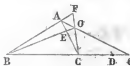
$$AO.BD.EC = OD.BC.AE \quad (2).$$

Multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), et supprimant les facteurs communs, il vient

$$AF.BD.EC = BF.DC.AE.$$

THÉORÈME VIII.

Réciproquement, si trois points F, D, E , en nombre impair sur les côtés d'un triangle ABC , et en nombre pair sur les prolongements, sont tels que le produit de trois segments non consécutifs, $AF \cdot BD \cdot EC$, soit égal au produit des trois autres $BF \cdot DC \cdot AE$, les droites qui joignent ces points aux sommets opposés se couperont en un même point.



En effet, si la droite AD ne passe pas par le point de concours O des droites CF, BE , tirons la droite AO , qui rencontre BC au point G ; on aura, en vertu du théorème précédent,

$$AF \cdot BG \cdot EC = BF \cdot GC \cdot AE \quad (1);$$

mais, par hypothèse,

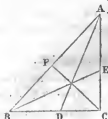
$$AF \cdot BD \cdot EC = BF \cdot DC \cdot AE \quad (2).$$

d'où, divisant membre à membre,

$$\frac{BG}{BD} = \frac{GC}{DC} \quad \text{ou} \quad \frac{BG}{GC} = \frac{BD}{DC},$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le point G se confond avec le point D .

Corollaire. Les bissectrices AD, BE, CF , des angles d'un triangle ABC se coupent en un même point. En effet, AD étant la bissectrice de l'angle BAC , on a



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

on a de même

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC},$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB}.$$

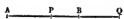
Multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{BD \cdot AF \cdot CE}{DC \cdot FB \cdot AE} = 1 \quad \text{ou} \quad BD \cdot AF \cdot CE = DC \cdot FB \cdot AE.$$

Donc, les bissectrices doivent concourir en un même point.

On démontrerait semblablement que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point, et qu'il en est de même des droites qui joignent les sommets du triangle aux milieux des côtés opposés.

DÉFINITIONS.

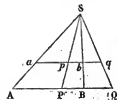
 I. Une ligne AB est divisée *harmoniquement* aux points P et Q, lorsque

$$AP : PB :: AQ : BQ.$$

II. On en déduit $AP : AQ :: PB : BQ$.

Donc la droite PQ est aussi divisée harmoniquement par les points A et B.

III. Les quatre points A, B, P, Q, sont dits *harmoniques*; A et B sont dits *conjugués*, ainsi que P et Q.



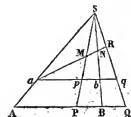
IV. Si l'on joint les quatre points harmoniques A, B, P, Q, à un point S, on aura un système de quatre droites SA, SB, SP, SQ, qui prend le nom de *faisceau harmonique*.

Il est évident que toute droite *apbq*, parallèle à APBQ, sera divisée harmoniquement par le faisceau.

THÉORÈME IX.

Toute droite *aMNR* qui coupe un faisceau harmonique *SAPBQ*, est divisée harmoniquement par ce faisceau, et l'on a

$$aM : MN :: aR : NR.$$



En effet, menons par le point *a*, *aq* parallèle à AQ, et considérons le triangle *aNb*, coupé par la transversale *Sp*, on a

$$aM \cdot pb \cdot SN = MN \cdot ap \cdot Sb;$$

$$\text{d'où} \quad \frac{aM}{MN} \cdot \frac{pb}{ap} \cdot \frac{SN}{Sb} = 1 \quad (1).$$

Le même triangle *aNb*, coupé par la transversale *Sq*, donne

$$aR \cdot bq \cdot SN = NR \cdot aq \cdot Sb;$$

$$\text{d'où} \quad \frac{aR}{NR} \cdot \frac{bq}{aq} \cdot \frac{SN}{Sb} = 1. \quad (2);$$

Comparant les égalités (1) et (2), il vient

$$\frac{aM}{MN} \cdot \frac{pb}{ap} \cdot \frac{SN}{Sb} = \frac{aR}{NR} \cdot \frac{bq}{aq} \cdot \frac{SN}{Sb}.$$

Or, la droite ab , étant divisée harmoniquement aux points p et q , on a

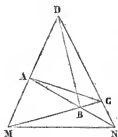
$$\frac{pb}{ap} = \frac{bq}{aq};$$

donc,

$$\frac{aM}{MN} = \frac{aR}{NR}.$$

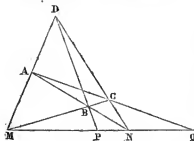
DÉFINITION.

Si l'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère $ABCD$, jusqu'à leur rencontre en M et en N , la droite MN est dite la *troisième diagonale* du quadrilatère, et le quadrilatère simple $ABCD$, réuni au quadrilatère non convexe $DMBN$, forme ce qu'on appelle un *quadrilatère complet*.



THÉORÈME X.

Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est partagée harmoniquement par les deux autres.



Soit $ABCDMN$ le quadrilatère complet; soient AC , BD , MN , ses diagonales; je dis que l'une d'elles, MN , par exemple, est coupée harmoniquement par les deux autres aux points P et Q . En effet, le triangle DMN , coupé par la transversale ACQ ,

donne $QM.NC.DA = QN.CD.AM$;

d'où
$$\frac{QM}{QN} \cdot \frac{NC}{CD} \cdot \frac{DA}{AM} = 1 \quad (1).$$

Dans le même triangle, les droites PD, CM, NA, partant des sommets et se coupant en B, on aura

$$PM.NC.DA = PN.CD.AM;$$

d'où
$$\frac{PM}{PN} \cdot \frac{NC}{CD} \cdot \frac{DA}{AM} = 1 \quad (2).$$

Comparant les égalités (1) et (2), on en déduit

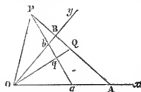
$$\frac{PM}{PN} = \frac{QM}{QN}.$$

On démontrerait semblablement que chacune des diagonales AC, BD, est divisée harmoniquement par les deux autres.

DU POLE ET DE LA POLAIRE PAR RAPPORT A UN SYSTÈME DE DEUX LIGNES DROITES.

THÉORÈME XI.

Deux droites Oy, Ox, étant données, ainsi qu'un point P, si l'on mène, par ce point, une sécante PAB, et qu'on détermine le conjugué harmonique Q du point P, par rapport à la droite AB, en faisant varier la sécante PAB, le point Q décrira la droite OQ, qui est la quatrième branche du faisceau harmonique dont OP, OA, OB, sont les trois premières.

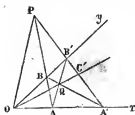


En effet, si l'on tire les droites OP, OQ, la figure OPBQA forme un faisceau harmonique. Toute sécante Pbqa sera donc divisée harmoniquement par le faisceau; donc tout point du lieu se trouve sur la droite OQ.

Cette droite OQ est dite la *polaire* du point P, par rapport aux deux droites Oy, Ox.

THÉORÈME XII.

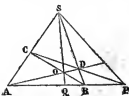
Deux droites Oy , Ox , étant données et un point P , si l'on mène par ce point deux sécantes PBA , $PB'A'$, et les droites BA' , $B'A$, le point de concours Q de ces deux droites décrira, lorsqu'on fera varier les sécantes, une droite OQ , qui est la polaire du point P par rapport aux lignes Oy , Ox .



En effet, considérons le quadrilatère complet $OBQA$, $B'A'$, la diagonale $B'A'$ sera coupée harmoniquement par les deux autres OQ , AB ; donc les quatre lignes OP , Oy , OC' , Ox , forment un faisceau harmonique, puisque la droite $PB'C'A'$ est divisée harmoniquement; et la droite OC' est la polaire du point P , par rapport aux deux droites Oy , Ox . Or, tout point Q du lieu géométrique est situé sur OC' ; donc, le lieu géométrique cherché est la polaire du point P , par rapport aux deux droites Oy , Ox .

Scolie. On déduit de là le moyen de résoudre, avec la règle seulement, le problème suivant :

Connaissant une droite AB et un point P sur cette droite, trouver le conjugué harmonique de P par rapport à la droite AB .

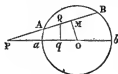


Pour cela, joignez un point quelconque S aux trois points donnés; menez par le point P la droite quelconque PDC ; tirez les droites AD et BC qui se coupent en O , et joignez SO ; cette dernière rencontrera AB au point cherché Q . Cela résulte évidemment du théorème qui vient d'être démontré.

DU POLE ET DE LA POLAIRE PAR RAPPORT
AU CERCLE.

THÉORÈME XIII.

Si, par un point P, pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante quelconque PAB, et qu'on détermine le conjugué harmonique Q du point P, par rapport à AB, le lieu géométrique du point Q, lorsqu'on fait varier la sécante PAB, est une ligne droite. (Cette droite est appelée la polaire du point P par rapport au cercle, et le point P en est le pôle).



Menons le diamètre passant par le point P, et construisons le conjugué harmonique q du point P, par rapport au diamètre ab ; joignons Qq , et abaissons OM perpendiculaire sur la ligne AB .

Les quatre points harmoniques P, A, Q, B, donnent la proportion

$$PB : PA :: QB : QA,$$

d'où $PB + PA : PA :: QB + QA$ ou $AB : QA$;

Changeant l'ordre des moyens, et remarquant que

$$AB = PB - AP,$$

il vient $PB + PA : PB - PA :: PA : QA$,

et en composant les termes,

$$PB + PA : 2PB :: PA : PA + AQ \text{ ou } PQ;$$

mais le point M étant le milieu de AB, on a

$$PA + PB = 2PM;$$

donc $2PM : 2PB :: PA : PQ$,

ou $PM : PB :: PA : PQ$;

il en résulte $PQ \times PM = PB \times PA$ (1).

On démontrerait absolument de la même manière que

$$Pq \times PO = Pa \times Pb.$$

Or

$$PA \times PB = PA \times Pb;$$

donc

$$PQ \times PM = Pq \times PO,$$

ou

$$PQ : Pq :: PO : PM.$$

Les deux triangles PQq , PMO , ayant un angle égal P compris entre côtés proportionnels, seront semblables, et, comme l'angle PMO est droit, l'angle PqQ l'est aussi; donc, le lieu géométrique décrit par le point Q est une droite perpendiculaire à Pab , au point q , conjugué harmonique de P par rapport au diamètre ab .

Corollaire. La position du point q est déterminée par l'égalité

$$Pq \times PO = Pa \times Pb \quad (1);$$

$$\text{or} \quad Pa \times Pb = (PO + Oa)(PO - Oa) = \overline{PO}^2 - \overline{Oa}^2;$$

d'ailleurs

$$Pq = PO - Oq,$$

la relation (1) devient donc

$$(PO - Oq) PO = \overline{PO}^2 - \overline{Oa}^2,$$

ou

$$PO \times Oq = \overline{Oa}^2.$$

Cette dernière relation montre que si PO devenait égal à Oq , Oq serait égal à PO ; donc la polaire de l'un des deux points P ou q passe par l'autre point.

Il résulte encore de cette relation, que si le point P se rapproche du point a , le point q s'en rapproche également; et si PO était égal à Oa , Oq serait aussi égal à Oa ; donc la polaire d'un point de la circonférence est la tangente à ce point.

Si PO devient plus petit que Oa , Oq devient plus grand que le rayon, et la polaire est extérieure au cercle; enfin, si PO devenait égal à zéro, Oq deviendrait infiniment grand.

THÉORÈME XIV.

Lorsqu'un point P se meut sur une droite ST , la polaire de ce point passe constamment par le pôle de la droite.



Tirons la droite OP , déterminons le point Q de telle sorte que

$$OQ \times OP = \overline{OA}^2;$$

la droite QN , perpendiculaire à OP , sera la polaire du point P ; or je dis qu'elle contiendra le pôle de la droite ST .

Abaïssons OM perpendiculairement sur ST, et qui coupe NQ en N; le quadrilatère MNQP est inscriptible, puisque deux angles opposés sont droits. On aura donc

$$OM \times ON = OP \times OQ,$$

et comme $OP \times OP = \overline{OA}^2$,

on aura $OM \times ON = \overline{OA}^2$;

donc, enfin, le point N est le pôle de ST.

Corollaire I. On voit par la démonstration ci-dessus, que si la droite ST tournait autour du point P, le pôle de cette droite serait toujours situé sur la polaire du point P.

* *Corollaire II.* La droite qui joint les pôles de deux droites est la polaire de leur point de concours. Car, d'après le corollaire I, le pôle de cette droite doit se trouver à la fois sur les deux droites données.

Corollaire III. Si deux polygones ABCD, abcd, d'un même nombre de côtés, tracés dans le plan d'une circonférence, sont tels que les sommets A, B, C, D soient les pôles des côtés de l'autre; réciproquement, les sommets a, b, c, d du second seront les pôles des côtés du premier. A raison de cette propriété, les deux polygones sont appelés *polaires réciproques* l'un de l'autre.

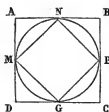
THÉORÈME XV.

Si, par un point P, pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante PAB, et les tangentes AM, BM, aux points A et B, le lieu géométrique décrit par le point M, quand la sécante variera, sera la polaire du point P.



En effet, la tangente AM est la polaire du point A, la tangente BM est aussi la polaire du point B. Il en résulte que le point de concours M des deux tangentes est le pôle de la droite AB. Or le point P est sur la droite AB, donc la polaire de ce point passe par le point M.

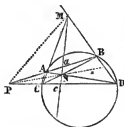
Corollaire I. La polaire d'un point M, pris hors du cercle, est la corde de contact AB de l'angle circonscrit qui a ce point pour sommet.



Corollaire II. Si un polygone ABCD est circonscrit au cercle, le polygone MNPQ, formé en joignant les points de contact consécutifs, sera la polaire réciproque de ABCD.

THÉORÈME XVI.

Si, par un point P, pris dans le plan d'un cercle, on mène les sécantes PAB, PCD; qu'on tire les droites AC, BD, qui se coupent en M, et les droites BC, AD, qui se coupent en N, le lieu géométrique des points M ou N, lorsqu'on fait varier les sécantes PAB, PCD, est une droite qui est la polaire du point P.



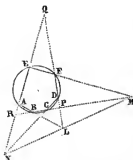
Tirons la droite MN qui coupe AB, CD, en a , c ; en vertu du théorème du quadrilatère complet MANB, CD, les sécantes AB, CD, seront coupées harmoniquement, la première en P, a , et la seconde en P, c ; la droite ac est donc la polaire du point P. Or les points M et N sont sur cette droite; donc, enfin, le lieu géométrique des points M ou N est la polaire du point P.

Remarque I. Si le point donné N était intérieur à la circonférence, en menant deux sécantes quelconques CB, AD, puis joignant AC, BD d'une part, et de l'autre AB, CD, il s'agirait de trouver le lieu géométrique du point M ou du point P; or je dis que ce lieu serait toujours la polaire du point N. En effet, on vient de voir que le point P est le pôle de la droite MN; par la même raison, le point M est le pôle de la droite PN: donc le point de concours des lignes MN, PN, est le pôle de la droite PM.

Remarque II. Le théorème précédent fournit le moyen de construire la polaire d'un point en employant la règle seulement.

Si le point donné P est extérieur à la circonférence, la polaire MN est la corde de contact de l'angle circonscrit dont le sommet est en P. L'intersection de cette droite avec le cercle donnera donc les points de contact des tangentes qu'on peut mener à la circonférence par le point P.

THÉORÈME XVII.



Dans tout hexagone inscrit à une circonférence, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Prolongeons trois côtés non consécutifs de l'hexagone BC, DF, AE; ces côtés déterminent, par leurs intersections, le triangle QRP, qui est coupé par les transversales EFM, ABL, DCN; on a donc, en vertu du théorème fondamental des transversales, les égalités

$$QE \times RM \times PF = RE \times PM \times QF,$$

$$QA \times RB \times PL = RA \times PB \times QL,$$

$$QN \times RC \times PD = RN \times PC \times QD.$$

Multipliant ces égalités, et remarquant que

$$QE \times QA = QF \times QD, \quad PF \times PD = PB \times PC,$$

et

$$RB \times RC = RE \times RA,$$

il vient

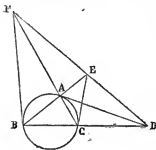
$$RM \times QN \times PL = RN \times PM \times QL.$$

Donc les trois points N, L, M sont sur une même droite, qui est une transversale du triangle QRP.

Remarque I. Le théorème précédent serait également vrai si l'hexagone inscrit n'était pas convexe.

Remarque II. Le théorème, ayant lieu quelle que soit la grandeur des côtés, s'applique encore lorsque certains côtés de l'hexagone se réduisent à zéro; mais alors ils doivent être remplacés par des tangentes à la circonférence: de là résulteraient

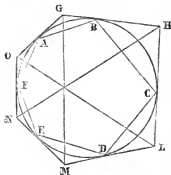
plusieurs autres théorèmes, dont le lecteur formerait facilement les énoncés. Nous nous bornerons à citer le suivant:



Si l'on inscrit un triangle dans un cercle, les points de concours des tangentes menées à chaque sommet avec les côtés opposés sont en ligne droite.

THÉORÈME XVIII.

Dans tout hexagone circonscrit à une circonférence, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point.



Soit GHLMNO l'hexagone circonscrit; joignons les points de contact consécutifs : nous formerons un hexagone inscrit ABCDEF, qui est le polaire réciproque de GHLMNO.

Le point de concours des côtés BC, EF, que nous désignerons par P, sera le pôle de la diagonale HN; de même, le point de concours des côtés AB, ED, que nous désignerons par R, sera le pôle de la droite GM; enfin le point de rencontre des droites AF, CD, que nous appellerons S, sera le pôle de la ligne GL. Or les trois points P, R, S, sont sur une même droite; donc leurs polaires HN, GM, OL, se coupent en un même point.



APPENDICE AU LIVRE IV.

DÉFINITIONS.

I. On appelle *maximum* la quantité la plus grande entre toutes celles de la même espèce; *minimum* la plus petite.

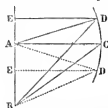
Ainsi le diamètre du cercle est un *maximum* entre toutes les lignes qui joignent deux points de la circonférence, et la perpendiculaire est un *minimum* entre toutes les droites menées d'un point donné à une ligne donnée.

II. On appelle figures *isopérimètres* celles qui ont des périmètres égaux.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

De tous les triangles formés avec deux côtés donnés faisant entre eux un angle à volonté, le maximum est celui dans lequel les deux côtés donnés font un angle droit.



Soient les deux triangles BAC, BAD, qui ont le côté AB commun, et le côté $AC = AD$; si l'angle BAC est droit, je dis que le triangle BAC sera plus grand que le triangle BAD, dans lequel l'angle en A est aigu ou obtus.

Car la base AB étant la même, les deux triangles BAC, BAD, sont comme les hauteurs AC, DE; mais la perpendiculaire DE est plus courte que l'oblique AD ou son égale AC; donc le triangle BAD est plus petit que BAC.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Le cercle est plus grand que toute figure plane isopérimètre.

1° Il est d'abord évident qu'il y a une infinité de figures d'un

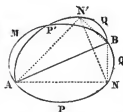
périmètre donné, qui ont diverses formes et diverses aires; mais on voit aussi que ces aires ne peuvent croître indéfiniment.

Il y a donc parmi les figures d'un périmètre donné un ou plusieurs maximum.

2° Toute figure qui renferme une aire maximum dans un périmètre donné est convexe.



Car soit AMBN une ligne fermée non convexe : si l'on fait tourner la partie rentrante AMB autour des points A et B, de manière qu'elle occupe la position AM'B, la figure AM'BN aura même périmètre que la première, et renfermera une aire plus grande.



3° Soit AMBN une figure maximum sous un périmètre donné : je dis que toute droite AB qui divise le périmètre en deux parties égales, divisera aussi l'aire en deux parties équivalentes; car, si la portion ANB était plus grande que AMB, en faisant tourner ANB autour de AB, de manière qu'elle occupe la

position AN'B, la figure AN'BN aurait le même périmètre que AMBN, et aurait une aire plus grande; AMBN ne serait donc pas un maximum.

Il résulte encore de ce qui précède que si AMBN est une figure maximum, AN'BN en est aussi une; et l'on voit que, dans cette dernière figure, toute perpendiculaire NN' à AB est divisée par cette ligne en deux parties égales, de sorte que les triangles ANB, AN'B, sont égaux.

Cela posé, si les angles ANB, AN'B n'étaient pas droits, on pourrait agrandir simultanément l'aire des triangles ANB, AN'B, sans rien changer à la grandeur des côtés AN, NB, AN', N'B, ni à la grandeur des segments APN, NQB, AP'N', N'Q'B; la base commune AB changerait seule; mais par là l'aire de la figure deviendrait plus grande, sans que le périmètre changeât, ce qui est contraire à l'hypothèse; donc les angles N, N' sont droits, d'ailleurs le point N est quelconque sur la courbe ANB; donc cette ligne est une demi-circonférence.

Ainsi l'on voit que si une droite divise la figure maximum en

deux moitiés, chacune de ces moitiés sera un demi-cercle ; donc la figure entière est un cercle.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Parmi toutes les figures planes qui ont la même aire, le cercle a le plus petit périmètre.

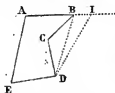
Car si une figure quelconque dont l'aire est A avait un périmètre moindre que le cercle ayant la même aire, on pourrait, d'après le théorème précédent, la transformer en un cercle de même périmètre, et d'une aire $B > A$.

Ce second cercle aurait donc une aire plus grande que le premier, et un périmètre moindre, ce qui est absurde.

PROPOSITION IV.

LEMME.

Tout polygone ABCDE qui contient un angle rentrant peut être transformé en un polygone convexe, d'une surface plus grande ayant le même périmètre et un côté de moins.



Car, si l'on prolonge AB , et qu'on joigne tous les points de ce prolongement au point D , la somme $BI + ID$ croîtra d'une manière continue depuis BD jusqu'à l'infini. Il y a donc un point I où l'on a $BI + ID = BC + CD$.

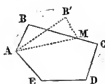
On obtient donc un polygone $ABIDE$, évidemment plus grand que $ABCDE$, qui a le même périmètre, et un côté de moins.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

De tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier est le plus grand.

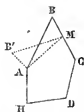
Nous allons prouver successivement que, si un polygone n'a pas tous ses côtés égaux et ses angles égaux, il ne peut être maximum parmi les isopérimètres d'un même nombre de côtés.



1° Supposons que le polygone $ABCDE$ ait m côtés; et soit $AB < BC$. Prenons sur BC le point M assez près de C pour qu'on ait encore $AB < BM$. Faisons ensuite l'angle $AMB' = BAM$; prenons $MB' = AB$ et joignons AB' . Le triangle ABM est égal au triangle $AB'M$.

On conclut de là que l'on pourrait au polygone $ABCDE$ substituer le polygone $AB'MCDE$, sans changer le périmètre ni la surface; seulement ce nouveau polygone aurait $m+1$ côtés, et de plus un angle rentrant; car, AB étant plus petit que BM , on a l'angle $BMA < BAM$ ou $B'MA$.

Or ce polygone peut être transformé en un autre de m côtés, de même périmètre, et d'une surface plus grande; donc $ABCDE$ ne serait pas le plus grand parmi les isopérimètres de m côtés.



2° Supposons que dans le polygone $ABCDH$ de m côtés, on ait l'angle $A > B$. Prenons un point M assez voisin de B pour que l'angle MAH soit plus grand que AMC .

Faisons aussi l'angle $MAB' = AMB$, prenons $AB' = MB$ et joignons MB' ; le triangle MAB' est égal à ABM ; et le polygone $AB'MCDH$ a la même surface et le même périmètre que $ABCDH$; mais il a $m+1$ côtés, et un angle rentrant; car, la somme $AMC + AMB$ étant égale à 2 droits, on a $MAH + MAB' > 2$ droits.

Donc ce polygone pourrait être transformé en un autre de m côtés, de même périmètre, et d'une aire plus grande; donc enfin $ABCDH$ ne serait pas maximum.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

De tous les polygones d'égale surface et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier a le moindre périmètre.

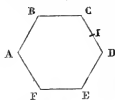
Car si un polygone irrégulier de m côtés, dont l'aire est A , avait un périmètre moindre que le polygone régulier de même aire et du même nombre de côtés, on pourrait le transformer en un polygone régulier isopérimètre de m côtés, ayant une

aire $B > A$; ce second polygone régulier aurait donc le même nombre de côtés que le premier, avec un périmètre moindre, et une aire plus grande, ce qui est absurde.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

De deux polygones réguliers d'égal périmètre, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.



En effet soit ABCDEF un polygone régulier de 6 côtés. Si l'on prend un point I sur l'un des côtés, on peut considérer ce polygone comme un polygone irrégulier de 7 côtés, dans lequel les côtés IC, ID feraient un angle égal à deux droits; or ce polygone est moindre que le polygone régulier de 7 côtés et du même périmètre; donc, etc.



APPENDICE AUX LIVRES VI ET VII.

LES POLYÈDRES RÉGULIERS.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers.

Car on a défini *polyèdres réguliers* ceux dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles solides sont égaux entre eux. Ces conditions ne peuvent avoir lieu que dans un petit nombre de cas.

1° Si les faces sont des triangles équilatéraux, on peut former chaque angle solide du polyèdre avec trois angles de ces triangles, ou avec quatre, ou avec cinq : de là naissent trois corps réguliers, qui sont le *tétraèdre*, l'*octaèdre*, et l'*icosaèdre*. On n'en peut pas former un plus grand nombre avec des triangles équilatéraux, car six angles de ces triangles valent quatre angles droits, et ne peuvent former d'angle solide.

2° Si les faces sont des carrés, on peut assembler leurs angles trois à trois ; et de là résulte l'*hexaèdre* ou *cube*.

Quatre angles de carrés valent quatre angles droits, et ne peuvent former d'angle solide.

3° Enfin, si les faces sont des pentagones réguliers, on pourra encore assembler leurs angles trois à trois, et il en résultera le *dodécaèdre régulier*.

On ne peut aller plus loin ; car trois angles d'hexagones réguliers valent quatre angles droits, et trois d'heptagones encore plus.

Donc il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers, trois formés avec des triangles équilatéraux, un avec des carrés, et un avec des pentagones.

Scolie. On va prouver, dans la proposition suivante, que ces

cinq polyèdres existent réellement, et qu'on peut en déterminer toutes les dimensions lorsqu'on connaît une de leurs faces.

PROPOSITION II.

PROBLÈME.

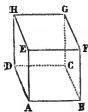
Étant donnée l'une des faces d'un polyèdre régulier, ou seulement son côté, construire le polyèdre.

Ce problème en présente cinq, qui vont être résolus successivement.

Construction du tétraèdre.

Soit ABC le triangle équilatéral qui doit être une des faces du tétraèdre; au point O , centre de ce triangle, élevez OS perpendiculaire au plan ABC ; terminez cette perpendiculaire au point S , de sorte que $AS = AB$; joignez SB, SC , et la pyramide $SABC$ sera le tétraèdre requis.

Car, à cause des distances égales OA, OB, OC , les obliques SA, SB, SC , s'écartent également de la perpendiculaire SO et sont égales. L'une d'elles $SA = AB$; donc les quatre faces de la pyramide $SABC$ sont des triangles égaux au triangle donné ABC . D'ailleurs les angles solides de cette pyramide sont égaux entre eux, puisqu'ils sont formés chacun avec trois angles plans égaux; donc cette pyramide est un tétraèdre régulier.

Construction de l'hexaèdre.

Soit $ABCD$ un carré donné : sur la base $ABCD$ construisez un prisme droit dont la hauteur AE soit égale au côté AB . Il est clair que les faces de ce prisme sont des carrés égaux, et que ses angles solides sont égaux entre eux comme étant formés chacun avec trois angles droits; donc ce prisme est un hexaèdre régulier ou cube.

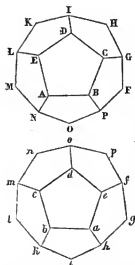
Construction de l'octaèdre.

Soit AMB un triangle équilatéral donné : sur le côté AB décrivez le carré $ABCD$; au point O , centre de ce carré, élevez sur son plan la perpendiculaire TS , terminée de part et d'autre en T et S , de manière que $OT = OS = AO$; joignez ensuite $SA, SB, TA, etc.$, vous aurez un solide $SABCDT$, composé de deux pyramides quadrangulaires $SABCD, TABCD$, adossées par leur base commune $ABCD$; ce solide sera l'octaèdre régulier demandé.

En effet, le triangle AOS est rectangle en O , ainsi que le triangle AOD ; les côtés AO, OS, OD , sont égaux ; donc ces triangles sont égaux, donc $AS = AD$. On démontrera de même que tous les autres triangles rectangles $AOT, BOS, COT, etc.$, sont égaux au triangle AOD ; donc tous les côtés $AB, AS, AT, etc.$, sont égaux entre eux, et par conséquent le solide $SABCDT$ est compris sous huit triangles égaux au triangle équilatéral donné ABM . Je dis de plus que les angles solides du polyèdre sont égaux entre eux : par exemple, l'angle S est égal à l'angle B .

Car il est visible que le triangle SAC est égal au triangle DAC , et qu'ainsi l'angle ASC est droit ; donc la figure $SATC$ est un carré égal au carré $ABCD$. Mais si on compare la pyramide $SABCT$ à la pyramide $SABCD$, la base $ASCT$ de la première peut se placer sur la base $ABCD$ de la seconde ; alors le point O étant un centre commun, la hauteur OB de la première coïncidera avec la hauteur OS de la seconde, et les deux pyramides se confondront en une seule ; donc l'angle solide S est égal à l'angle solide B ; donc le solide $SABCDT$ est un octaèdre régulier.

Scolie. Si trois droites égales, AC, BD, ST , sont perpendiculaires entre elles et se coupent dans leur milieu, les extrémités de ces droites seront les sommets d'un octaèdre régulier.

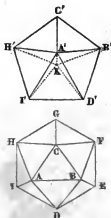
Construction du dodécaèdre.

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier donné; soient ABP , CBP , deux angles plans égaux à l'angle ABC : avec ces angles plans formez l'angle solide B , et soit K l'inclinaison mutuelle de deux de ces plans. Formez semblablement aux points C , D , E , A , des angles solides égaux à l'angle solide B , et situés de la même manière: le plan CBP sera le même avec le plan BCG , puisqu'ils sont inclinés l'un et l'autre de la même quantité K sur le plan $ABCD$. On peut donc, dans le plan $PBCG$, décrire le pentagone $BCGFP$ égal au pentagone $ABCDE$. Si on fait de même dans chacun des autres plans CDI , DEL , etc., on aura une surface

convexe $PFGH$, etc., composée de six pentagones réguliers égaux et inclinés chacun sur son adjacent de la même quantité K . Soit $pfgh$, etc., une seconde surface égale à $PFGH$, etc., je dis que ces deux surfaces peuvent être réunies de manière à ne former qu'une seule surface convexe continue. En effet, l'angle opf , par exemple, peut se joindre aux deux angles OPB , BPF , pour faire un angle solide P égal à l'angle B ; et dans cette jonction il ne sera rien changé à l'inclinaison des plans BPF , BPO , puisque cette inclinaison est telle qu'il le faut pour la formation de l'angle solide. Mais, en même temps que l'angle solide P se forme, le côté pf s'appliquera sur son égal PF , et au point F se trouveront réunis trois angles plans PFG , pfe , efg , qui formeront un angle solide égal à chacun des angles déjà formés; cette jonction se fera sans rien changer ni à l'état de l'angle P , ni à celui de la surface $efgh$, etc.; car les plans PFG , efp , déjà réunis en P , ont entre eux l'inclinaison convenable K , ainsi que les plans efg , efp . Continuant ainsi de proche en proche, on voit que les deux surfaces s'ajusteront mutuellement l'une avec l'autre, pour ne former qu'une seule surface continue et rentrante sur elle-même:

cette surface sera celle d'un dodécaèdre régulier, puisqu'elle est composée de douze pentagones réguliers égaux, et que tous ses angles solides sont égaux entre eux.

Construction de l'icosaèdre.



Soit ABC une de ses faces; il faut d'abord former un angle solide avec cinq plans égaux au plan ABC et également inclinés chacun sur son adjacent. Pour cela, sur le côté $B'C'$, égal à BC , faites le pentagone régulier $B'C'H'D'$; au centre de ce pentagone élevez sur son plan une perpendiculaire, que vous terminerez en A' de manière que $B'A' = B'C'$; joignez $A'C'$, $A'H'$, $A'I'$, $A'D'$, et l'angle solide A' , formé par les cinq plans $B'A'C'$, $C'A'H'$, etc., sera l'angle solide requis. Car les obliques $A'B'$, $A'C'$, etc., sont égales, et l'une d'elles, $A'B'$, est égale au côté $B'C'$; donc tous les triangles $B'A'C'$, $C'A'H'$, etc., sont égaux entre eux et au triangle donné ABC .

Il est visible d'ailleurs que les plans $B'A'C'$, $C'A'H'$, etc., sont également inclinés chacun sur son adjacent; car les angles solides B' , C' , etc., sont égaux entre eux, puisqu'ils sont formés chacun avec deux angles de triangles équilatéraux et un de pentagone régulier. Appelons K l'inclinaison des deux plans où sont les angles égaux; l'angle K sera en même temps l'inclinaison de chacun des plans qui composent l'angle solide A' sur son adjacent.

Cela posé, si on fait aux points A , B , C , des angles solides égaux chacun à l'angle A' , on aura une surface convexe $DEFG$, etc., composée de dix triangles équilatéraux, dont chacun sera incliné sur son adjacent de la quantité K ; et les angles D , E , F , etc., de son contour réuniront alternativement trois et deux angles de triangles équilatéraux. Imaginez une seconde surface égale à la surface $DEFG$, etc.; ces deux surfaces pourront s'adapter mutuellement, en joignant chaque angle triple de l'une à un angle double de l'autre; et comme les plans

de ces angles ont déjà entre eux l'inclinaison K nécessaire pour former un angle solide quintuple égal à l'angle A , il ne sera rien changé dans cette jonction à l'état de chaque surface en particulier, et les deux ensemble formeront une seule surface continue, composée de vingt triangles équilatéraux. Cette surface sera celle de l'icosaèdre régulier, puisque d'ailleurs tous les angles solides sont égaux entre eux.

PROPOSITION III.

PROBLÈME.

Trouver l'inclinaison de deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier.

Cette inclinaison se déduit immédiatement de la construction qui vient d'être donnée des cinq polyèdres réguliers; à quoi il faut ajouter ce problème de géométrie descriptive par lequel, étant donnés les trois angles plans qui forment un angle solide, on détermine l'angle que deux de ces plans font entre eux.

Dans le tétraèdre. Chaque angle solide est formé de trois angles de triangles équilatéraux : il faut donc chercher par le problème cité l'angle que deux de ces plans font entre eux; cet angle sera l'inclinaison de deux faces adjacentes du tétraèdre.

Dans l'hexaèdre. L'angle de deux faces adjacentes est un angle droit.

Dans l'octaèdre. Formez un angle solide avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle droit; l'inclinaison des deux plans où sont les angles des triangles sera celle de deux faces adjacentes de l'octaèdre.

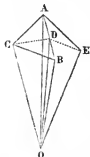
Dans le dodécaèdre. Chaque angle solide est formé avec trois angles de pentagones réguliers; ainsi l'inclinaison des plans de deux de ces angles sera celle de deux faces adjacentes du dodécaèdre.

Dans l'icosaèdre. Formez un angle solide avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle de pentagone régulier, l'inclinaison des deux plans où sont les angles des triangles sera celle de deux faces adjacentes de l'icosaèdre.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME.

Étant donné le côté d'un polyèdre régulier, trouver le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite au polyèdre.



Il faut d'abord démontrer que tout polyèdre régulier peut être inscrit dans la sphère, et qu'il peut lui être circonscrit.

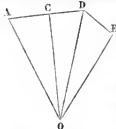
Soit AB le côté commun à deux faces adjacentes; soient C et E les centres de ces deux faces, et CD, ED, les perpendiculaires abaissées de ces centres sur le côté commun AB, lesquelles tomberont au point D, milieu de ce côté. Les deux perpendiculaires CD, DE, font entre elles un angle connu, qui est égal à l'inclinaison des deux faces adjacentes, déterminée par le problème précédent. Or, si dans le plan CDE, perpendiculaire à AB, on mène sur CD et ED les perpendiculaires indéfinies CO et EO, qui se rencontrent en O, je dis que le point O sera le centre de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite, le rayon de la première étant OC, et celui de la seconde OA.

En effet, puisque les apothèmes CD, DE, sont égaux, et l'hypoténuse DO commune, le triangle rectangle CDO est égal au triangle rectangle ODE, et la perpendiculaire OC est égale à la perpendiculaire OE. Mais, AB étant perpendiculaire au plan CDE, le plan ABC est perpendiculaire à CDE, ou CDE à ABC; d'ailleurs CO, dans le plan CDE, est perpendiculaire à CD, intersection commune des plans CDE, ABC; donc CO est perpendiculaire au plan ABC. Par la même raison EO est perpendiculaire au plan ABE; donc les deux perpendiculaires CO, EO, menées aux plans de deux faces adjacentes par les centres de ces faces, se rencontrent en un même point O et sont égales. Supposons maintenant que ABC et ABE représentent deux autres faces adjacentes quelconques, l'apothème CD restera toujours de la même grandeur, ainsi que l'angle CDO, moitié de CDE; donc le triangle rectangle CDO

et son côté CO seront égaux pour toutes les faces du polyèdre; donc, si du point O comme centre et du rayon OC on décrit une sphère, cette sphère touchera toutes les faces du polyèdre dans leurs centres (car les plans ABC, ABE, seront perpendiculaires à l'extrémité d'un rayon), et la sphère sera inscrite dans le polyèdre, ou le polyèdre circonscrit à la sphère.

Joignez OA, OB; à cause de $CA=CB$, les deux obliques OA, OB, s'écartant également de la perpendiculaire, seront égales; il en sera de même de deux autres lignes quelconques menées du centre O aux extrémités d'un même côté; donc toutes ces lignes sont égales entre elles; donc si du point O comme centre et du rayon OA on décrit une surface sphérique, cette surface passera par les sommets de tous les angles solides du polyèdre, et la sphère sera circonscrite au polyèdre ou le polyèdre inscrit dans la sphère.

Cela posé, la solution du problème proposé n'a plus aucune difficulté, et peut s'effectuer ainsi :



Étant donné le côté d'une face du polyèdre, décrivez cette face, et soit CD son apothème. Cherchez par le problème précédent l'inclinaison de deux faces adjacentes du polyèdre, et faites l'angle CDE égal à cette inclinaison. Prenez DE égale à CD, menez CO et EO perpendiculaires à CD et ED; ces deux perpendiculaires se rencontreront en un point O, et CO sera

le rayon de la sphère inscrite dans le polyèdre.

Sur le prolongement de DC prenez CA égale au rayon du cercle circonscrit à une face du polyèdre, et OA sera le rayon de la sphère circonscrite à ce même polyèdre.

Scolie. On peut tirer des propositions précédentes plusieurs conséquences.

1^o Tout polyèdre régulier peut être partagé en autant de pyramides régulières que le polyèdre a de faces : le sommet commun de ces pyramides sera le centre du polyèdre, qui est en même temps celui des sphères inscrite et circonscrite.

2^o La solidité d'un polyèdre régulier est égale à sa surface multipliée par le tiers du rayon de la sphère inscrite.

3° Deux polyèdres réguliers de même nom sont deux solides semblables, et leurs dimensions homologues sont proportionnelles ; donc les rayons des sphères inscrites ou circonscrites sont entre eux comme les côtés de ces polyèdres.

4° Si on inscrit un polyèdre régulier dans une sphère, les plans menés du centre le long des différents côtés partageront la surface de la sphère en autant de polygones sphériques égaux et semblables que le polyèdre a de faces.

SBN 609312











BIBLIOTECA